



Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées

Méthodes d'optimisation pour le réglage de contrôleurs PID

Emmanuel DE GEEST

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade
d'Ingénieur Civil Electricien (Electronique)

Année Académique 2000-2001

Remerciements

Je voudrais d'abord exprimer ma gratitude envers Monsieur le Professeur R. SEPULCHRE pour m'avoir permis de réaliser ce travail de fin d'études au sein du Service de Systèmes et d'Automatique. Je tiens à lui dire combien est grande ma reconnaissance pour les précieux conseils qu'il m'a régulièrement prodigués, son dévouement et le goût de la recherche qu'il m'a communiqué.

J'associe à ces remerciements Monsieur P. Ansay, chercheur post-doctorat, pour sa disponibilité lors des nombreux échanges de vues qui ont contribué à l'aboutissement de cette étude.

Je remercie vivement les membres du Jury, Messieurs les Professeurs J. DESTINE, A. GENON, R. GOREZ, R. SEPULCHRE et Th. VAN CUTSEM pour l'intérêt qu'ils porteront à ce travail.

Ma reconnaissance va également à Monsieur Nicolas Raimarckers, ingénieur de la société TECHSPACE AERO pour avoir guidé mes premiers pas dans l'apprentissage de la programmation temps-réel Labview.

Enfin, je tiens à remercier le Service de Systèmes et d'Automatique de m'avoir donné la chance de participer à un séminaire de formation au langage Labview auprès de NATIONAL INSTRUMENTS à Bruxelles.

INTRODUCTION - - - - -	1
Chapitre 1. Méthodes classiques de régulation et choix d'une structure de régulation - - - - -	4
1.1 Description du Three-Tank- - - - -	4
1.1.1 Modélisation du Three-Tank - - - - -	5
1.1.2 Étude des performances de la boucle ouverte - - - - -	6
1.1.3 Conclusion - - - - -	7
1.2 Contrôle à un degré de liberté - - - - -	7
1.2.1 Action Proportionnelle (P) - - - - -	8
1.2.2 Action intégrale (I) - - - - -	9
1.2.3 Action Proportionnelle-Intégrale (PI) - - - - -	9
1.2.4 Action proportionnelle - dérivée (avance de phase) - - - - -	12
1.2.5 Action proportionnelle-intégrale-dérivée (PID) - - - - -	13
1.2.6 Commentaires- - - - -	14
1.3 Contrôle à deux degrés de liberté - - - - -	15
1.3.1 Structure de la boucle de régulation- - - - -	15
1.3.2 Spécifications - - - - -	16
1.3.2.1 Rejet de perturbations- - - - -	17
1.3.2.2 Sensibilité aux erreurs de modèle - - - - -	18
1.3.2.3 Suivi de consigne - - - - -	19
1.4 Conclusions - - - - -	20
Chapitre 2. Réglage d'un contrôleur PI à partir d'un problème d'optimisation : aspects théoriques et simulations - - - -	21
2.1 Problème d'optimisation - - - - -	22
2.1.1 Formulation du problème d'optimisation - - - - -	22
2.1.2 Contrainte de sensibilité - - - - -	23
2.1.3 Stabilité - - - - -	24
2.1.4 Optimisation - - - - -	25
2.2 Méthode complète de Design - - - - -	26
2.2.1 Suivi de consigne- - - - -	26
2.2.2 Méthode finale - - - - -	26
2.3 Algorithmes - - - - -	27
2.4 Simulations- - - - -	29
2.4.1 Simulations sans l'action feedforward - - - - -	29

2.4.1.1 Principe des simulations- - - - -	29
2.4.1.2 Résultats de simulations - - - - -	29
2.4.1.3 Conclusions- - - - -	32
2.4.2 Simulations avec l'action feedforward - - - - -	32
2.4.2.1 Résultats de simulations et améliorations des résultats - - - - -	32
2.4.3 Robustesse- - - - -	35
2.4.4 Régulateur final- - - - -	37
Chapitre 3. Réglage d'un PI à partir d'un problème d'optimisation: aspects pratiques et expérimentaux - - - - -	39
3.1 Système échantillonné - - - - -	39
3.1.1 Discrétisation - - - - -	39
3.1.2 Implémentation Labview du régulateur- - - - -	40
3.1.3 Choix de la fréquence d'échantillonnage - - - - -	40
3.2 Saturation de l'actionneur. - - - - -	43
3.3 Résultats expérimentaux - - - - -	44
3.3.1 Rejet de perturbations - - - - -	44
3.3.2 Suivi de consigne et Robustesse - - - - -	46
3.3.3 Conclusions - - - - -	47
Chapitre 4. Réglage d'un PID à partir d'un problème d'optimisation: aspects théoriques et simulations - - - - -	48
4.1 Problème d'optimisation - - - - -	48
4.1.1 Contrainte de sensibilité - - - - -	49
4.1.2 Difficulté dans la résolution du problème- - - - -	50
4.2 Design final - - - - -	51
4.2.1 Réglage de l'action feedforward - - - - -	51
4.2.2 Méthode finale et algorithme - - - - -	51
4.3 Simulations- - - - -	53
4.3.1 Simulations sans l'action feedforward - - - - -	53
4.3.1.1 Introduction - - - - -	53
4.3.1.2 Compromis Performance - Robustesse - - - - -	54
4.3.1.2.1 Variation de Kd - - - - -	54
4.3.1.2.2 Variation de Ms - - - - -	56
4.3.1.3 Limite de robustesse sur le Kd- - - - -	57
4.3.1.4 Conclusions- - - - -	58
4.3.2 Simulations avec l'action feedforward - - - - -	59
4.3.3 Conclusions - - - - -	61

Chapitre 5. Réglage d'un PID à partir d'un problème d'optimisation : implémentation et expérimentation- - - - -	62
5.1 Implémentation du PID - - - - -	62
5.1.1 Saturation de l'actionneur - - - - -	62
5.2 Résultats expérimentaux - - - - -	64
5.3 Structure de régulation améliorée - - - - -	64
5.3.1 Résultats expérimentaux - - - - -	66
5.3.2 Récapitulatif - - - - -	67
Chapitre 6. Algorithme de réglage de PID - - - - -	68
6.1 Méthode générale - - - - -	68
6.2 Méthode détaillée - - - - -	69
6.2.1 Base de données - - - - -	69
6.2.2 Critère de stabilité de la boucle fermée- - - - -	69
6.2.3 Critère de temps de réponse sur le suivi de consigne- - - - -	70
6.2.4 Critère sur la robustesse du système - - - - -	70
6.2.5 Critère de robustesse aux variations de gain - - - - -	71
6.2.6 Spécification sur le bruit - - - - -	72
6.2.7 Saturation de l'actionneur - - - - -	72
6.2.8 Conclusions - - - - -	73
6.3 Exemple - - - - -	74
6.4 Comparaison PI - PID - - - - -	75
6.4.1 Résultats de simulations - - - - -	76
6.4.2 Conclusions - - - - -	78
Chapitre 7. " Iterative Feedback Tuning " : Méthode d'optimisation expérimentale - - - - -	79
7.1 Critère de synthèse - - - - -	79
7.2 Minimisation du critère - - - - -	81
7.2.1 Signaux de sortie- - - - -	81
7.2.2 Signaux d'entrée - - - - -	83
7.2.3 Estimation du gradient - - - - -	83
7.2.4 Modification de la direction de recherche- - - - -	84
7.3 Résumé de l'algorithme- - - - -	84

Chapitre 8. Réglage d'un PID par "Iterative Feedback Tuning"	85
8.1 Objectifs de la régulation	85
8.2 Régulation de suivi de consigne	85
8.2.1 Implémentation de l'IFT	85
8.2.1.1 Modèle de référence	85
8.2.1.2 Structure du contrôleur et calcul des dérivées	86
8.2.1.3 Choix du pas γ	88
8.2.2 Expérience IFT n°1.	90
8.2.3 Expérience IFT n°2	91
8.2.3.1 Variante de la méthode de base	91
8.2.3.2 Résultats	92
8.3 Régulation du rejet de perturbations et du suivi de consigne	93
8.3.1 Modèle IFT pour une perturbation déterministe	93
8.3.2 Méthode proposée	95
8.3.3 Expérience IFT n°3	96
8.3.4 Conclusions	99
Chapitre 9. Conclusions	101
Bibliographie	104
Annexes	106

INTRODUCTION

Suite au développement sans cesse croissant de l'informatique, les méthodes d'optimisation connaissent de nos jours un essor considérable.

D'autre part, les contrôleurs de type PID se révèlent suffisants pour résoudre un grand nombre de problèmes de contrôle et ce, particulièrement lorsque la dynamique du système est bénigne et que les exigences en terme de performances sont modestes.

A ce propos, une étude de 1993, rapporte que sur plus de 2000 boucles de régulation, 95 % de celles-ci utilisaient des structures de type PID, la majorité de ces dernières étant en fait de type PI. Seulement 20 % de ces boucles de régulation fonctionnèrent correctement. Une des causes majeures de ces faibles performances consistait en un mauvais choix des paramètres du régulateur. Malgré l'emploi étendu du contrôleur PI, il n'existe pas de méthode de design universellement acceptée.

Anciennement, les contrôleurs de type PID étaient réglés de manière empirique, par exemple par les méthodes décrites par Ziegler et par Nichols (1942).

Ces méthodes étaient basées sur la détermination de quelques caractéristiques de la dynamique du système. Les paramètres du contrôleur étaient alors exprimés en terme de ces caractéristiques par des formules simples. Ces méthodes, bien que nécessitant peu d'information sur le système, comportent un inconvénient de taille, à savoir: le système en boucle fermée présente un très faible amortissement, typiquement $\zeta \cong 0, 2$ ([6]).

Il y a dès lors plusieurs raisons qui poussent à développer des méthodes d'optimisation pour le réglage de contrôleurs PID.

Il importera de saisir la finalité du problème de régulation. Deux types classiques de problèmes sont le suivi de consigne et le rejet de perturbations. Il importera également d'avoir une connaissance sur le type de perturbation et les incertitudes de modèle. Les spécifications sur le système de régulation devront être exprimées de manière adéquate en vue de la formulation d'un problème d'optimisation, qu'il conviendra alors de résoudre par voie algorithmique.

Les différentes méthodes d'optimisation étudiées dans ce travail peuvent être scindées en deux groupes suivant qu'elles se basent sur la connaissance ou non de la dynamique du système.

Les méthodes nécessitant un modèle de la dynamique du système feront l'objet de la première partie du travail. Elles seront basées sur des méthodes récemment proposées dans la littérature et dues à K.J. Åström.

La méthode développée par K.J. Åström était à l'origine développée pour le PI ([8]). Une extension a été réalisée pour inclure le terme dérivé ([9]). L'analyse de celle-ci nous a montré qu'elle manquait de systématisme pour le réglage du terme dérivé. Notre démarche a consisté à rechercher une approche systématique de ce réglage.

L'objectif de ce mémoire a donc été de proposer une synthèse pour le régulateur PID basée sur la méthode d'Åström, tout en garantissant une approche systématique de l'action dérivée selon des objectifs de régulation.

La seconde partie de ce travail de fin d'études tente de comparer la synthèse de régulation décrite ci-dessus avec l' "Iterative Feedback Tuning" (IFT [14]), méthode ne nécessitant pas de modèle du procédé. Il s'agit d'une méthode d'optimisation itérative basée sur la minimisation d'un critère de type quadratique à partir des données expérimentales recueillies directement sur la boucle fermée.

La seconde contribution de ce travail a été de modifier l'algorithme de base de l'IFT afin de répondre aux mêmes exigences de régulation que celles décrites dans la première partie du travail

Ce travail de fin d'études n'a certainement pas la prétention d'étudier ces méthodes dans tous les cas d'espèces. C'est pourquoi nous resterons concentrés sur l'étude de systèmes SISO (Single Input single Output).

Notre étude sera principalement axée sur un système de type " process control " : le Three-Tank system. Il s'agit d'un système de régulation de hauteur d'eau. On se limitera donc principalement à ce système en vue d'une analyse plus fouillée et d'une validation expérimentale des résultats de simulations.

Néanmoins, les méthodes d'optimisation nécessitant un modèle du système seront testées sur un certain nombre d'exemples.

Le contenu de ce travail est structuré comme suit :

Le chapitre 1 vise à poser le problème de la régulation dans le cas particulier du Three-Tank. Des méthodes de régulations simples (lieu de racines et méthodes fréquentielles) typiquement enseignées dans un cours d'automatique de base seront utilisées sur différentes structures de régulation afin d'avoir une idée des performances pouvant ainsi être obtenues. L'intérêt de l'utilisation d'un contrôleur à deux degrés de liberté sera également discuté.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du réglage d'un contrôleur PI à partir d'un problème d'optimisation. Les fondements théoriques de la méthode sont d'abord expliqués. On montre ensuite la démarche algorithmique relative à cette méthode. La fin du chapitre vise à appliquer l'algorithme développé dans le cadre du Three-Tank.

Le chapitre 3 porte sur la mise en œuvre d'un régulateur PI ainsi que sur la validation expérimentale de la méthode d'optimisation relative au PI. Ceci est fait dans le cadre du Three-Tank. On passera en revue des sujets aussi variés que l'implémentation discrète d'un système temps-continu, le choix de la fréquence d'échantillonnage et la saturation de l'actionneur.

Le chapitre 4 porte sur une reformulation du problème d'optimisation du chapitre 2 dans le cadre d'une structure de régulation de type PID. Il y sera démontré que, contrairement au chapitre 2, ce problème d'optimisation ne mène pas directement à une solution analytique : on obtiendra une indétermination sur l'action dérivée. Les deux chapitres suivants montreront comment lever cette difficulté.

Le chapitre 5 aborde le choix du gain dérivé du contrôleur afin de lever l'indétermination rencontrée au chapitre précédent. Ce choix sera validé de manière expérimentale dans le cadre du Three-Tank. Il y est notamment démontré que ce gain ne doit pas être choisi aveuglément.

Le chapitre 6 élabore, sur base des chapitres précédents, un algorithme systématique permettant de déterminer les gains d'un régulateur PID à partir d'un modèle du système. Ce chapitre apporte donc une solution au premier objectif que nous nous sommes fixés. L'algorithme est illustré sur des systèmes de complexité très différente. Le chapitre se termine par une comparaison des performances obtenues sur ces systèmes à l'aide des deux algorithmes d'optimisation élaborés jusqu'ici (PI et PID).

Le chapitre 7 présente la théorie de base de l' "Iterative Feedback Tuning" (IFT) jusqu'à l'obtention d'un algorithme.

Le chapitre 8 est l'équivalent du chapitre 6 dans le cadre de l'IFT. On y propose une modification de l'algorithme de base de l'IFT présenté au chapitre 7 afin de répondre aux mêmes exigences de régulation que dans la première partie de ce travail. Cette méthode proposée sera appliquée dans le cadre du Three-Tank avec une structure de régulation de type PID. Les aspects relevant de l'implémentation de l'algorithme sont également discutés dans ce chapitre.

Enfin **le chapitre 9** tire les conclusions de ce travail.

Chapitre 1.

Méthodes classiques de régulation et choix d'une structure de régulation

Le propos de ce chapitre est de cerner le problème de la régulation sur base d'un exemple : le Three-Tank.

Les premiers essais de régulations à l'aide de méthodes classiques et de structures de régulation de type PID nous permettront de nous faire une idée des performances accessibles et de cerner les objectifs et les inévitables compromis de l'automatique.

De ces observations découlera la formulation d'une méthode de synthèse permettant de satisfaire aux exigences d'une bonne régulation de type industriel.

1.1 Description du Three-Tank

Le Three-Tank est un système hydraulique à trois réservoirs alimentés par deux pompes actionnées indépendamment. Diverses configurations permettent d'étudier des comportements dynamiques de complexité variable, représentatifs de systèmes réels de type process control. Le système est représenté à la figure 1.1.

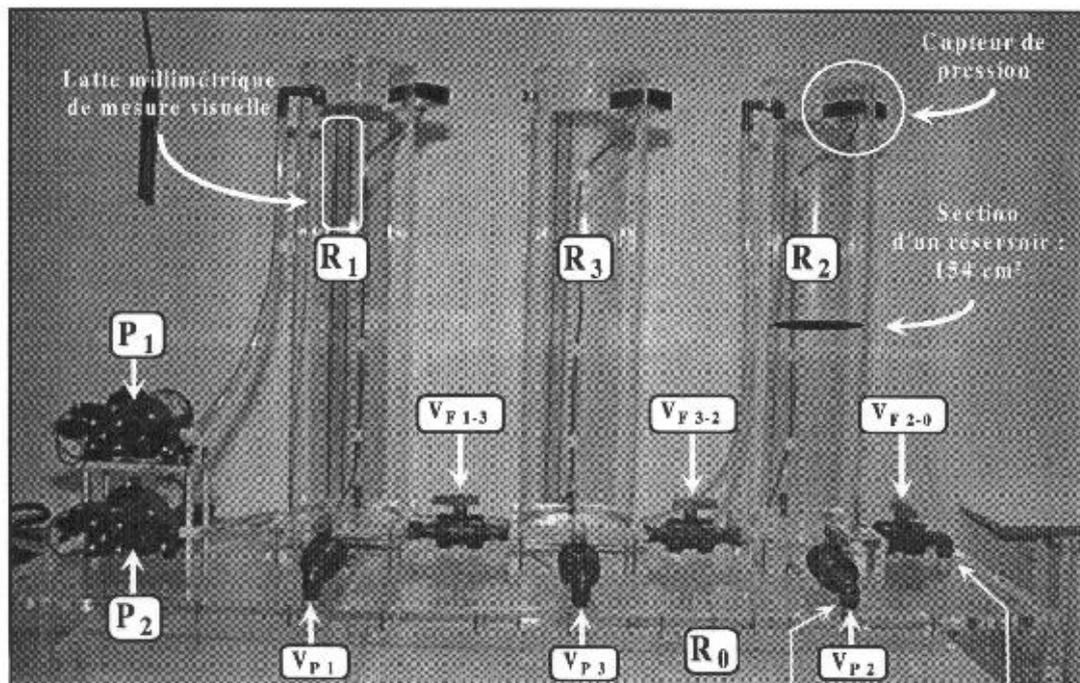


Figure 1.1: Représentation du dispositif expérimental - Ri: réservoir n° i - Pi: Pompe n° i - Vpi: vannes de perturbation - Vf i-j: vannes de fuite.

Chaque réservoir est muni, en son sommet, d'un capteur de pression qui mesure la pression de la colonne de liquide. Cette information, collectée par l'ordinateur, est convertie en hauteur d'eau. Pour permettre diverses configurations du système, les réservoirs verticaux sont interconnectés par des vannes, ce qui nous autorise donc à travailler avec un dispositif formé d'un, deux, voire trois réservoirs.

Dans le cadre de ce travail, les trois réservoirs verticaux sont utilisés (vannes, Vf, 1-3 et Vf, 3-2 ouvertes complètement).

Le système ainsi formé fonctionnera dans une configuration SISO ; nous tenterons de réguler la hauteur de colonne d'eau dans le réservoir R2 avec pour seule commande, le débit de la pompe P1. Une perturbation sera appliquée en ouvrant complètement la vanne VP1.

1.1.1 Modélisation du Three-Tank

Cette section montre la démarche utilisée pour modéliser le Three-Tank. La configuration du Three-Tank décrite précédemment est schématisée à la figure 1.2.

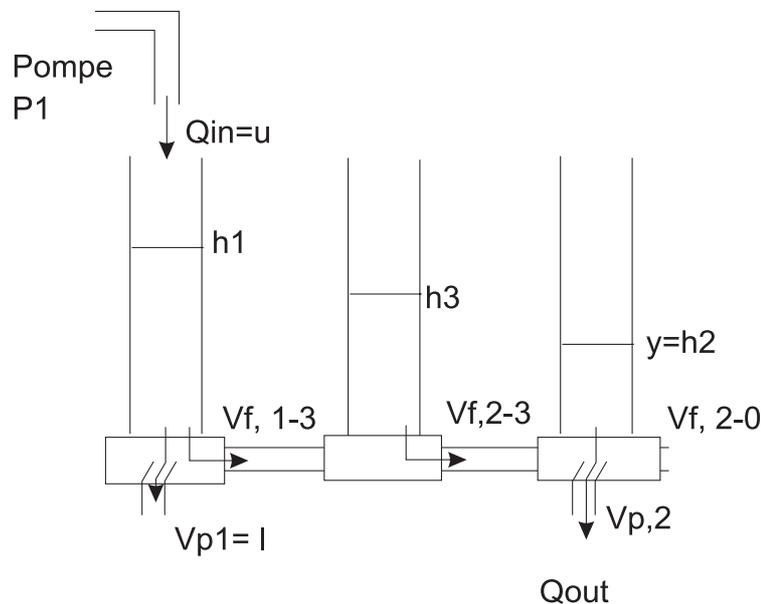


Figure 1.2: Schéma de modélisation du Three-Tank.

Cette figure montre que l'entrée u et la sortie y du système sont respectivement équivalentes à la hauteur d'eau du second réservoir (h_2) et au débit de la pompe P1. La perturbation l sera provoquée en ouvrant la vanne VP1.

Afin d'obtenir une modélisation du système, chaque hauteur d'eau constituera une variable d'état et il sera alors possible d'obtenir un ensemble de trois équations différentielles du premier ordre en exprimant un bilan massique sur chaque réservoir. Pour le réservoir i de section S_r , le bilan massique s'exprimera par l'équation suivante :

$$\frac{dm_i}{dt} = S_r \frac{dh_i}{dt} = \sum_k Q_{in, k} - \sum_l Q_{out, l}$$

Dans cette dernière expression, $Q_{in, k}$ symbolise un débit entrant et $Q_{out, l}$ un débit sortant. Les différents débits entrants et sortants regroupent les débits d'alimentation, les débits de fuite entre réservoirs ainsi que les débits d'évacuation de perturbation. Le débit de fuite entre le réservoir i et le réservoir j est lié à la différence des hauteurs h_i et h_j par l'équation de Bernouilli :

$$Q_{ij} = S_f a_{z,ij} \text{sign}(h_i - h_j) \sqrt{2g|h_i - h_j|}$$

où S_f est la section de fuite et $a_{z,ij}$ est un facteur déterminé expérimentalement.

De même, un débit d'évacuation ou de perturbation pour le réservoir i est donné par :

$$Q_{out, i} = S_{f, i} (a_{z, i-o} \sqrt{2gh_i})$$

$$Q_{p, i} = S_{p, i} (a_{z, i-o} \sqrt{2gh_i})$$

où $S_{f, i}$ est la section de fuite pour l'évacuation et $S_{p, i}$ la section de fuite pour la perturbation.

On s'aperçoit que nous avons affaire à un système de trois équations couplées et non-linéaires – à cause de la présence des racines carrées introduites dans l'expression des débits. En conséquence de quoi, il ne nous sera pas possible de dériver telle quelle une fonction de transfert décrivant la dynamique du système.

Nous nous attacherons donc à caractériser le système autour d'un de ses points de fonctionnement (u^* , h_1^* , h_2^* , h_3^*) en vue de pouvoir utiliser les techniques de l'automatique linéaire. Le point de fonctionnement choisi sera (u^* , h_1^* , h_2^* , h_3^*) = (24,9 ml/sec, 34,5 cm, 24,5 cm, 29,5 cm)

A partir de là, nous pourrons dériver un modèle d'état linéarisé autour de ce point de fonctionnement. Il ne nous restera plus qu'à résoudre – en variable de Laplace – ce modèle d'état linéarisé de manière à obtenir la fonction de transfert du système au point de fonctionnement choisi. La fonction de transfert entrée-sortie – notée $G(s)$ – sera alors donnée par

$$G(s) = \frac{1,95}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)} \quad (1.1)$$

$$\text{où } \tau_1=1015,80 ; \tau_2=56,34 \text{ et } \tau_3=20,56$$

L'équation (1.1) nous montre que nous sommes en présence d'un système stable du troisième ordre constitué de trois pôles réels.

De manière similaire, nous trouverons que la fonction de transfert perturbation-sortie sera donnée par cette même fonction de transfert $G(s)$ mais au signe près.

1.1.2 Étude des performances de la boucle ouverte

Nous pouvons déjà tirer des conclusions sur les performances du système en boucle ouverte par un simple examen de la fonction de transfert (1.1) : nous voyons que les trois pôles sont réels, strictement négatifs et que l'ordre de grandeur de deux d'entre eux est dans un facteur 10 au moins par rapport au troisième qui est donc le pôle dominant (ce pôle est extrêmement lent).

Nous sommes dès lors en mesure de conclure que nous sommes en présence d'un système présentant une dynamique dominante du premier ordre ; l'effet des deux pôles plus rapides consiste simplement en un retard de la réponse du premier ordre (présence d'un point d'inflexion proche de l'origine).

La réponse du Three-Tank en boucle ouverte à un échelon de commande unitaire est donnée à la figure 1.3.

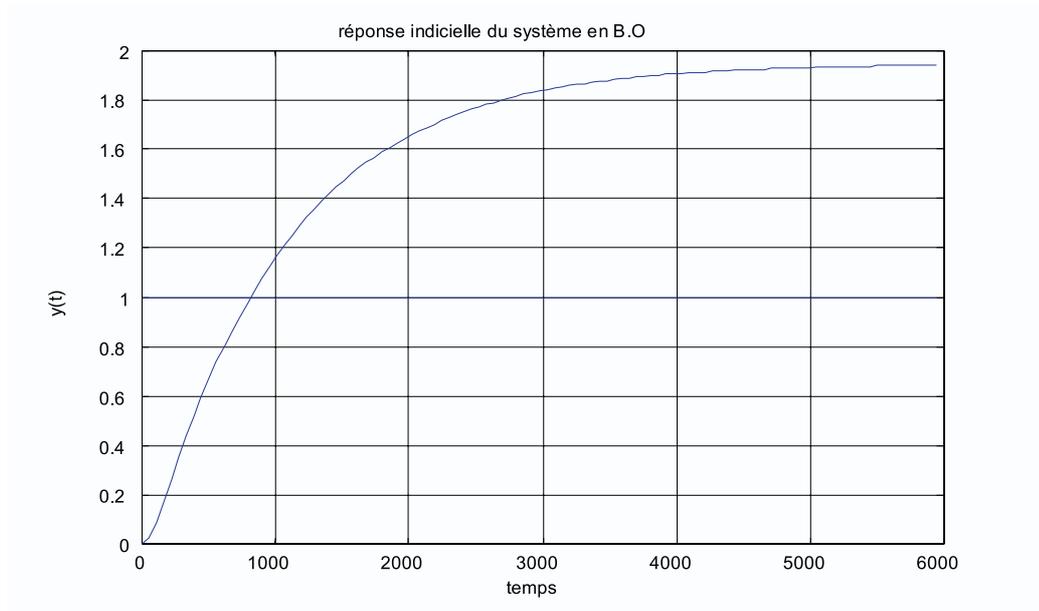


Figure 1.3 : Réponse indicielle du Three-Tank en boucle ouverte.

Nous obtenons bien une réponse dominante du premier ordre. De plus, une mesure de temps de réponse nous indique que celui-ci est de l'ordre de 1100 sec. La réponse indicielle révèle une valeur finale $y(\infty) = 1,95$, ce qui correspond au gain statique du système.

Notons encore que la réponse à une perturbation de type échelon unitaire sera également donnée par la réponse de la figure 1.3.

1.1.3 Conclusion

On retiendra de l'étude de la boucle ouverte du Three-Tank que :

- D'une part, le système présente de mauvaises performances : notre système est un système dominant du premier ordre, lent et ayant un gain statique différent de l'unité.
- D'autre part, le modèle dérivé pour le Three-Tank est incertain à cause de l'étape de linéarisation. En effet, il est évident que si nous avons choisi un autre point de fonctionnement, notre dynamique aurait été différente. On comprend qu'il sera dès lors nécessaire de tenir compte de ces changements de dynamique si nous voulons un régulateur efficace sur une certaine plage de hauteur. Néanmoins, tout laisse penser que si l'identification expérimentale des paramètres intervenant dans le modèle est correcte, le modèle développé autour de notre point de fonctionnement est également correct.

1.2 Contrôle à un degré de liberté

Le but principal de cette section et le suivant : se faire une première idée de l'intérêt de l'utilisation des actions proportionnelles, intégrales ou dérivées prises séparément ou combinées.

La plupart des méthodes de synthèse exposées ci-après ont été imaginées avant l'apparition des ordinateurs ; elles s'efforcent donc de réduire au strict minimum les calculs nécessaires, privilégiant le qualitatif plutôt que le quantitatif.

L'idée de base de ces méthodes consiste à essayer d'estimer le comportement du système en boucle fermée directement à partir du modèle en boucle ouverte. Ce ne sont généralement pas des méthodes basées sur de gros efforts de calcul.

On focalisera surtout notre attention sur les résultats obtenus. Le lecteur désirant trouver des précisions quant aux méthodes en elles-mêmes consultera [4] et [5].

On s'attachera dans ce chapitre à des boucles de régulation à un degré de liberté (figure 1.4) en raison de la simplicité de ces structures.

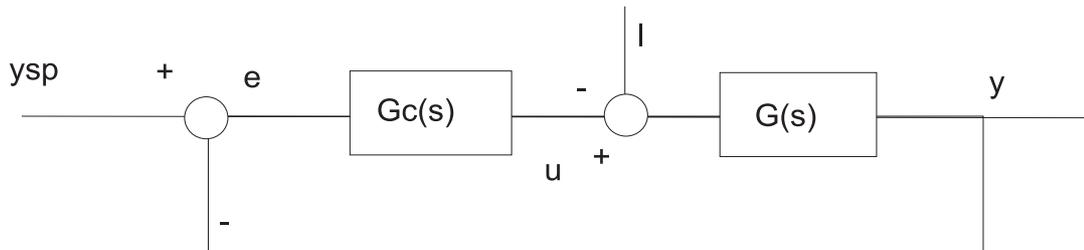


Figure 1.4: Schéma de régulation à un degré de liberté.

Dans le schéma de la figure 1.4, $G(s)$ est la fonction de transfert du processus, $G_c(s)$ est la fonction de transfert du régulateur, u la commande, y la sortie, l la perturbation, y_{sp} la consigne et e le signal d'erreur.

On peut cependant apporter une objection à ce schéma : il ne contient aucune source de bruit. Or, on sait que du bruit sera toujours présent dans la boucle de régulation. Il sera bien souvent malaisé d'introduire du bruit dans cette modélisation, à moins que d'en connaitre une description exacte.

Le schéma de la figure 1.4 sera utilisé lors des simulations: L'influence du bruit sera discutée après la phase expérimentale. Il conviendra alors de rajouter ou de ne pas rajouter un terme de filtrage sur le signal mesuré en fonction des résultats expérimentaux obtenus.

A partir du schéma de la figure 1.4, on trouvera les fonctions de transfert entre les signaux de sorties et les signaux d'entrées. On utilisera ces expressions ultérieurement. En notation matricielle, cela donne:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(s) \cdot G_c(s)}{[1 + G(s) \cdot G_c(s)]} & \frac{G(s)}{[1 + G(s) \cdot G_c(s)]} \\ \frac{G_c(s)}{[1 + G(s) \cdot G_c(s)]} & \frac{G(s) \cdot G_c(s)}{[1 + G(s) \cdot G_c(s)]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{sp}(s) \\ L(s) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.2.1 Action Proportionnelle (P)

Dans ce cas, la fonction de transfert $G_c(s)$ prendra la forme d'un simple gain K . Avec un tel contrôleur, il sera tentant d'augmenter K de manière à réduire l'erreur statique et à améliorer le rejet de perturbations. Néanmoins, on est cependant limité dans cette voie pour des raisons pratiques et pour des raisons théoriques :

- **Raisons pratiques:** ces raisons pratiques concernent la capacité du régulateur (et des circuits de commande) à fournir des signaux de commande d'amplitude suffisante. En effet, considérons par exemple la fonction de transfert entre u et y_{sp} (cf. équation (1.2)). Si $G_c(s) \gg 1$, on peut écrire que :

$$\frac{U(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{1}{G(s)}$$

Comme les processus physiques sont en général de type passe-bas – c'est le cas du Three-Tank – c'est-à-dire que $G(i\omega) \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$, la fonction inverse $1/G(i\omega) \rightarrow \infty$ pour les hautes fréquences.

Des variations brusques de consigne et des bruits à haute fréquence donneront lieu à des commandes u très grandes et donc physiquement impossibles à réaliser.

Il conviendra donc de limiter le gain K sous peine de quitter le domaine des systèmes linéaires (saturation des actionneurs).

- **Raisons théoriques** : les autres raisons qui empêchent d'augmenter à volonté le gain K ont trait à la stabilité et à l'augmentation de la bande passante en boucle fermée.

Démontrons cela dans le cas du Three-Tank via les diagrammes de Bode :

En augmentant K , on augmente la fréquence de coupure (et donc la bande passante du système en boucle fermée) en diminuant la marge de phase. En effet, le Three-Tank étant un système de type passe-bas, une augmentation de K sera synonyme de déplacement de la courbe de Bode en amplitude de $K G(s)$ vers la gauche alors que la courbe de Bode en phase de $K G(s)$ ne subira aucun changement.

De manière similaire, le lieu de racines présentera trois directions asymptotiques en $+ 60^\circ$, $- 60^\circ$ et $+ 180^\circ$. Les deux premières directions sont très déstabilisantes : pour des K croissants, les pôles de la boucle fermée se déplaceront de plus en plus vers l'axe imaginaire de plan en s , diminuant de ce fait la stabilité relative du système (oscillations de plus en plus prononcées).

Nos simulations sur le Three-Tank nous ont donc montré qu'il n'était pas possible de diminuer de beaucoup le temps de réponse à moins de concéder énormément sur le plan de la stabilité relative. L'action P isolée est donc insuffisante pour obtenir des performances acceptables en boucle fermée.

1.2.2 Action intégrale (I)

La fonction $G_c(s)$ s'écrira dans ce cas sous la forme d'un gain K_i multiplié par $(1/s)$.

L'action intégrale a essentiellement pour rôle d'éliminer l'erreur statique. En effet, le régime correspond par définition, à une situation où toutes les grandeurs sont constantes. Il est clair dès lors que, du fait de la présence de la fonction d'intégration, $u(t)$ ne pourra être constant que si $e(t) = 0$, c'est-à-dire $y(t) = y_{sp}(t)$. On peut également arriver à la même conclusion en calculant la valeur asymptotique de la réponse indicielle du système en boucle fermée.

A côté de son effet bénéfique sur l'erreur statique, l'action intégrale est malheureusement extrêmement néfaste sur le plan de la stabilité. Ceci est clairement mis en évidence dans le plan de Bode par l'apparition d'un déphasage supplémentaire de 90° , ce qui est évidemment tout à fait défavorable pour la marge de phase. De nouveau, pour revenir à une situation acceptable, on est obligé de réduire le gain K_i et donc de réduire la bande passante de la boucle fermée.

Encore une fois, les performances obtenues avec ce régulateur n'ont pas amélioré sensiblement les résultats de la boucle ouverte.

L'action I, prise toute seule, ne révèle donc pratiquement aucun intérêt.

1.2.3 Action Proportionnelle-Intégrale (PI)

Examinons la combinaison P + I. Le régulateur PI a pour équation:

$$G_c(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K + \frac{K_i}{s}$$

où $K_i = \frac{K}{T_i}$

Le régulateur comporte cette fois un pôle à l'origine et un zéro en $z = - 1 / T_i$.

Nous pouvons facilement remarquer que la combinaison P + I permet, en gros, de garder l'effet bénéfique de l'action intégrale en ce qui concerne l'erreur statique et d'en éviter les inconvénients en ce qui concerne la stabilité.

En effet, en examinant les courbes de Bode relatives au régulateur PI, on remarque que la présence du zéro supprime l'effet néfaste de l'intégrateur dans le domaine des hautes fréquences (voir figure 1.5 (a)).

De plus, afin d'obtenir les meilleures performances en poursuite et en rejet de perturbations, il convient de faire en sorte que $G_c(i\omega) G(i\omega)$ soit le plus grand possible dans la plage basse fréquence la plus étendue possible (cf équation (1.2)).

Pour y arriver, comme $G(i\omega)$ est en général limité, nous devons obtenir que $G_c(i\omega)$ soit le plus grand possible sur la plage basse fréquence la plus étendue possible.

On comprend dès lors qu'il faudra placer le zéro le plus loin possible vers la gauche, de manière à augmenter la plage de fréquence où $G_c(i\omega)$ est grand, mais de manière telle que la marge de phase reste dans les tolérances.

Cette structure nous laisse dès lors entrevoir de meilleurs résultats. Particularisons maintenant les propos précédents dans le cadre du Three-Tank.

Le problème principal consistera à bien placer le zéro. Un lieu de racines nous permettra facilement de trouver une zone à cet effet. Nous nous aiderons de la figure 1.5 (b) montrant la position des pôles de $G(s) G_c(s)$.

- (1) Choisir le gain K de manière à ouvrir suffisamment la bande passante. On repère alors la marge de phase de $K G (s)$.
- (2) Calculer l'ajout de phase ϕ_l nécessaire afin de garantir une certaine marge de phase pour le système en boucle fermée. On en déduira le rapport $m = \frac{d}{c}$ via la relation suivante:

$$\frac{m-1}{m+1} = \sin \phi_l$$

- (3) Repérer la fréquence à laquelle la courbe de Bode en amplitude de $K G (s)$ vaut $-10 \log(m)$. Cette fréquence sera notre nouvelle fréquence de coupure $\omega_{c, new}$.
- (4) Calculer la position du pôle d et du zéro c via les relations suivantes:

$$\omega_{c, new} = \sqrt{c \cdot d}$$

$$m = \frac{d}{c}$$

Cette démarche a été exploitée dans le cadre du Three-Tank. La figure 1.7 montre les résultats de suivi de consigne et de rejet de perturbations (réponses à des échelons unitaires).

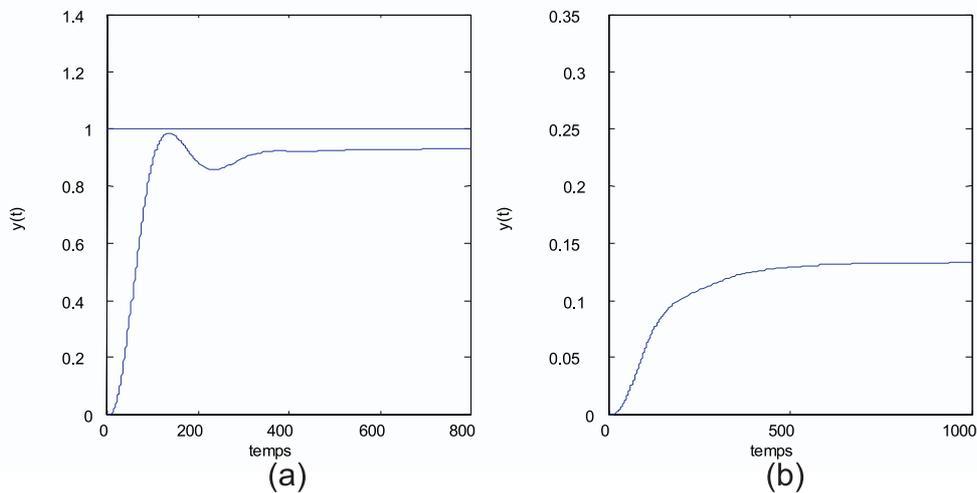


Figure 1.7 : Résultats (a) de suivi de consigne et (b) de rejet de perturbations pour une avance de phase dans le cas du Three-Tank.

L'avance de phase se révèle excellente pour régler la réponse transitoire. Néanmoins, il subsiste une erreur statique relativement importante (de l'ordre de 10 %).

1.2.5 Action proportionnelle-intégrale-dérivée (PID)

L'inconvénient majeur d'une avance de phase réside en la non-annulation de l'erreur statique. On sait par contre que le PI remédie parfaitement à cet inconvénient. De là l'idée de combiner l'effet bénéfique de l'action PI aux basses fréquences (annulation de l'erreur statique) et de l'action PD (avance de phase) aux hautes fréquences (amélioration de la réponse transitoire).

En vertu de ce qui a été dit précédemment, on essayera de placer l'effet dérivateur le plus loin possible vers les hautes fréquences et de prolonger l'effet intégral le plus loin possible vers les hautes fréquences mais en évitant qu'il n'affaiblisse le relèvement de phase du dérivateur.

Notre démarche dans le cadre du Three-Tank a consisté à venir ajouter un PI en série avec l'avance de phase synthétisée au paragraphe précédent, les résultats obtenus en terme de réponse transitoire de suivi de consigne s'avérant excellents. La forme du régulateur employé est la suivante:

$$Gc(s) = K \frac{\frac{s}{c} + 1}{\frac{s}{d} + 1} \frac{s + a}{s}$$

Notons qu'il existe d'autres formes de régulateur PID. Le lecteur consultera [6] à cet égard.

Dans la forme de régulateur employée ci-dessus - K, c et d ont été déterminés à la section précédente -, seul le zéro introduit par le PI sera à déterminer. On comprend facilement au regard de la figure 1.5 (a) qu'il sera nécessaire de placer le zéro du PI de manière à ce que la diminution de phase apportée par l'action PI ne détruise pas totalement l'ajout de phase apporté par l'action PD. Une règle de bonne pratique consistera alors à placer le zéro du PI une décade plus bas que la fréquence de coupure ; dans ce cas, seulement 6° de diminution de marge de phase sont à prévoir.

Après quelques essais, on parviendra à placer le zéro correctement (figure 1.8). Comme attendu, on est parvenu à annuler l'erreur statique en conservant les avantages générés par l'avance de phase. Ceci constitue le meilleur résultat obtenu jusqu'ici.

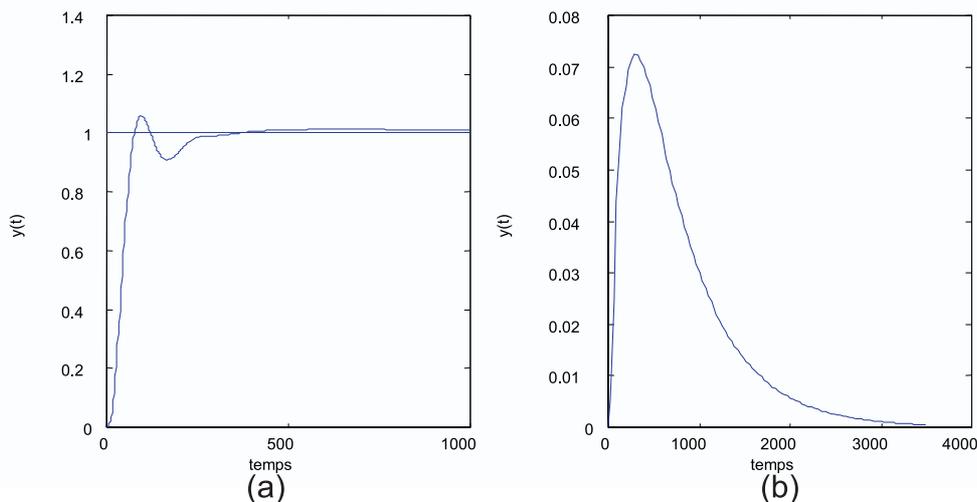


Figure 1.8: Résultat de (a) suivi de consigne et de (b) rejet de perturbations pour un régulateur de type PID (avance de phase en série avec un PI).

1.2.6 Commentaires

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que les avantages et inconvénients de différentes structures de type PID et estimé les performances pouvant être atteintes à l'aide de méthodes qualitatives. Une telle étude nous a déjà permis de constater que des performances satisfaisantes étaient obtenues avec un PI, l'action dérivée supplémentaire permettant encore d'améliorer nettement ces performances. En conséquence, nous considérerons seulement les structures de type PI et PID dans la suite du travail.

En automatique, il est un fait connu que vouloir apporter des améliorations sur un point entraînera des détériorations sur d'autres points : c'est volontairement que les sections précédentes ne se sont pas préoccupées d'un tel problème.

De manière générale, il importera toujours de comprendre la finalité du problème de la régulation avant de passer à la phase de synthèse.

A ce titre, rappelons-nous que la section 1.1 a mis en évidence le fait que la fonction de transfert du Three-Tank n'est connue rigoureusement qu'en un point de fonctionnement donné.

Il importera dès lors de tenir compte d'erreurs de modélisation - dues aux non-linéarités dans le cas du Three-Tank - et plus particulièrement de leurs effets en terme de performances de régulation. Ce problème sera dénommé robustesse aux incertitudes de modèle. A ce stade, il nous semble qu'une bonne formulation d'un problème de design devra capturer à la fois des aspects relatifs aux performances (suivi de consigne et rejet de perturbations) ainsi que des aspects de robustesse. Ceci est réalisé à la section suivante.

1.3 Contrôle à deux degrés de liberté

Cette section a pour but essentiel de comprendre le ou les objectifs principaux d'une régulation de processus industriels et de traduire ces objectifs sous une forme mathématique pouvant être exploitée pour définir un problème d'optimisation. Un raffinement supplémentaire par rapport à la section précédente sera apporté : l'emploi d'un régulateur à deux degrés de liberté. On commencera par discuter l'intérêt d'un tel régulateur.

1.3.1 Structure de la boucle de régulation

Cette section se focalise sur la description de la boucle de régulation. Dans la section précédente, nous avons utilisé un algorithme de contrôle à un degré de liberté. Cela signifie que si l'on change n'importe quel paramètre du régulateur $G_c(s)$, à la fois le suivi de consigne et le rejet de perturbations en seront affectés. En effet, en examinant les fonctions de transfert données par les relations (1.2), $G_c(s)$ interviendra aussi bien dans la fonction de transfert entre la sortie y et la consigne y_{sp} que dans la fonction de transfert entre la sortie y et la perturbation l . Avec de tels algorithmes, on devra dès lors régler en même temps le suivi de consigne et le rejet de perturbations.

On comprend alors qu'il serait plus facile pour l'automaticien de découpler le problème du suivi de consigne de celui du rejet de perturbations en vue de saisir plus facilement les inévitables compromis. Il faudrait alors trouver une structure de régulation permettant d'agir sur un problème et puis sur l'autre. La figure 1.9 montre une structure permettant de procéder de la sorte.

En effet, le bloc $G_{ff}(s)$ n'agira que sur le suivi de consigne et pas sur le rejet de perturbations, contrairement au bloc $G_c(s)$ qui agira sur les deux.

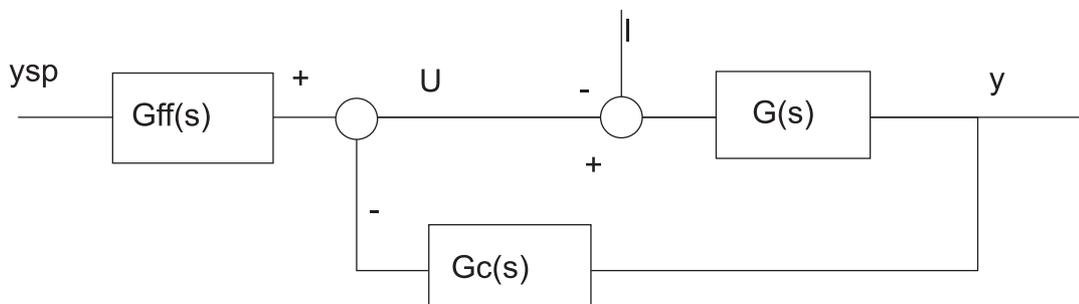


Figure 1.9 : Schéma de régulation à deux degrés de liberté.

Les méthodes d'optimisation qui seront discutées ultérieurement se baseront sur cette structure.

De manière plus précise, les régulateurs PI et PID à deux degrés de liberté seront respectivement décrits par les relations (1.3) et (1.4) :

$$u(t) = K(b \, y_{sp}(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (y_{sp}(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (1.3)$$

$$u(t) = K(b \, y_{sp}(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (y_{sp}(\tau) - y(\tau)) d\tau - K_d \frac{dy}{dt}(t) \quad (1.4)$$

On voit d'après les relations précédentes que contrairement aux paramètres K , K_i et K_d , le paramètre b sera seulement présent dans le bloc $G_{ff}(s)$. Le paramètre b n'influencera que le suivi de consigne. Un contrôleur tel que celui décrit à la figure 1.9 possède deux degrés de liberté : il permettra de découpler le problème du suivi de consigne de celui du rejet de perturbations. On règlera d'abord les paramètres intervenant dans le bloc $G_c(s)$ de manière à satisfaire les spécifications sur le rejet de perturbations et puis seulement on agira sur le paramètre b pour satisfaire les exigences sur le suivi de consigne.

Cette structure laissera dès lors entrevoir une plus grande flexibilité pour satisfaire aux compromis de la régulation qu'une structure à un degré de liberté.

Rappelons encore une fois que ce schéma oublie les inévitables sources de bruits. L'influence du bruit sera discutée après la phase d'expérimentation. Il conviendra alors de rajouter ou de ne pas rajouter un terme de filtrage sur le signal mesuré en fonction des résultats expérimentaux obtenus.

1.3.2 Spécifications

De manière générale, il sera toujours nécessaire de comprendre dans un problème de contrôle quel sera le but premier de la régulation.

L'automatique est une science de compromis : vouloir atteindre des performances excellentes sur un plan ne pourra se faire qu'au prix de performances moindres sur d'autres plans. Il importe donc de cerner la finalité du problème de régulation.

Pensons par exemple à des systèmes de contrôle de mouvements ; dans ce type d'application, ce sera le suivi de consigne qui sera de première importance.

Dans les régulateurs industriels par contre, l'accent sera plutôt mis sur le rejet de perturbations.

Le Three-Tank sera de préférence vu comme appartenant à cette catégorie : réguler ce système à une hauteur extrêmement précise revêt peu d'intérêt en soi. L'industriel exploitant un tel système sera davantage intéressé par de faibles variations de hauteur lors de l'ouverture d'une vanne de fuite.

Cette méthode focalisera également son attention sur la sensibilité aux erreurs de modèles (robustesse aux incertitudes de modèles). Les raisons pour lesquelles ceci est également un objectif important ont déjà été discutées au paragraphe 1.2.6.

Les méthodes d'optimisation exposées ci-après prendront d'abord en compte le rejet de perturbations ainsi que la robustesse aux incertitudes de modèle. Le suivi de consigne sera un objectif de seconde importance.

Afin de bien formuler le problème d'optimisation, il importera d'abord de traduire les spécifications mathématiques sous une forme appropriée.

1.3.2.1 Rejet de perturbations

Il s'agit de l'objectif principal de notre régulation. Il est important de faire la différence entre une perturbation dite de charge et le bruit qui est un autre type de perturbations. Dans cette section, on se préoccupera exclusivement de la perturbation de charge. Celle-ci sera typiquement une perturbation basse fréquence. Il est dès lors logique d'utiliser un échelon unitaire pour simuler cette perturbation.

Si le système possède un intégrateur, l'erreur typique due à un échelon de perturbation est esquissée à la figure 1.10.

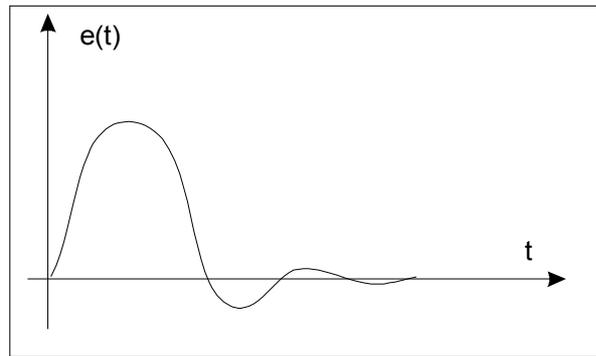


Figure 1.10 : Signal d'erreur lorsqu'on applique un échelon unitaire de perturbation à un système en boucle fermée possédant un intégrateur dans le régulateur.

Au vu de ce graphique, on peut aisément comprendre qu'un bon rejet de perturbations sera caractérisé par un rapide retour de l'erreur à zéro, sans que ce signal n'atteigne de trop grandes valeurs.

Une manière pratique de caractériser une telle perturbation sera d'utiliser l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur due à une perturbation de charge sous la forme d'un échelon unitaire appliqué à l'entrée du système, c'est-à-dire :

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (1.5)$$

Pour les processus non-oscillatoires, le critère IAE se réduit au critère IE à savoir :

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (1.6)$$

La quantité IE sera une bonne approximation de l'IAE pour des systèmes oscillatoires bien amortis.

La raison essentielle de l'utilisation de l'IE est que sa valeur peut être directement reliée aux paramètres du régulateur.

En effet, par le théorème de la valeur finale, la relation (1.6) se transforme comme suit :

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \quad (1.7)$$

De plus, pour le régulateur PI défini par la relation (1.3) ainsi qu'une perturbation de charge de type échelon unitaire, on arrivera au résultat suivant:

$$IE = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{\left[1 + G(s) \left(K + \frac{Ki}{s}\right)\right]} \frac{1}{s} = \frac{1}{Ki} \quad (1.8)$$

Le gain intégral est donc inversement proportionnel à l'IE dans le cas du régulateur PI à deux degrés de liberté. On arrivera au même résultat dans le cas du régulateur PID défini par la relation (1.4).

Il sera cependant facile de trouver des exemples où l'IE aura peu de signification : c'est le cas d'un système oscillatoire avec peu d'amortissement ; l'erreur étant alternativement : positive, puis négative, il est possible d'obtenir un indice IE proche de zéro bien que n'ayant pas un bon rejet de perturbations. Nous serons donc amenés dans la partie simulation à vérifier l'adéquation de cette démarche.

1.3.2.2 Sensibilité aux erreurs de modèle

La nature non-linéaire du Three-Tank a été mise en évidence. Néanmoins, afin d'obtenir un modèle entrée-sortie du Three-Tank, nous avons dû procéder à une étape de linéarisation autour d'un point d'équilibre du système. Il est manifeste que le modèle entrée-sortie du Three-Tank dépend du point de fonctionnement choisi.

Il s'en suit que la dynamique du système variera en fonction du point de fonctionnement.

Puisque le système peut changer de comportement, il est fondamental de choisir les paramètres du contrôleur de manière à ce que la boucle fermée ne soit pas trop sensible à une variation de la dynamique. On peut exprimer cela en se servant de la fonction de sensibilité que nous noterons $S(s)$. Celle-ci exprime le rapport entre la variation relative de la fonction de transfert de la boucle fermée et la variation relative de la fonction de transfert du système. La fonction de sensibilité sera définie par la relation suivante :

$$S(s) = \frac{1}{(1 + G_c(s)G(s))} \quad (1.9)$$

Dans cette dernière relation, $G(s)$ représente la fonction de transfert du système et $G_c(s)$ la fonction de transfert du contrôleur comprise dans la boucle de feedback.

On peut exprimer cette sensibilité aux erreurs de modèle en terme de la valeur maximum de la fonction de sensibilité soit M_s défini par :

$$M_s = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(i\omega)| \quad (1.10)$$

Ce maximum de sensibilité aura une interprétation facile dans le plan de Nyquist : M_s est l'inverse de la plus courte distance séparant la courbe de Nyquist au point -1 (voir figure 1.11)

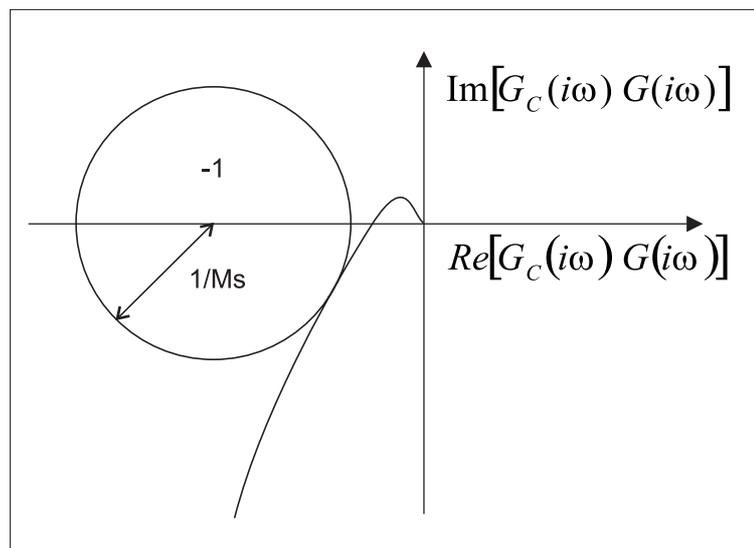


Figure 1.11 : Définition de M_s sur le diagramme de Nyquist.

La sensibilité M_s devra être réglée en fonction de la robustesse du système à réguler. En conséquence de quoi, si nous devons régler un système peu robuste, on aura de préférence tendance à choisir une faible valeur pour M_s . Si, par contre, on a affaire à un système assez robuste, on choisira une valeur de M_s plus grande. La littérature recommande des valeurs de M_s entre 1,2 et 2. ([6]).

1.3.2.3 Suivi de consigne

Comme déjà expliqué auparavant, l'objectif de base est d'obtenir un bon rejet de perturbations ainsi qu'une bonne robustesse aux erreurs de modèle.

Il est cependant nécessaire que le système présente également une bonne réponse à un échelon de consigne.

A partir du régulateur PI à deux degrés de liberté défini précédemment - relation (1.3) -, on peut obtenir la fonction de transfert entre la sortie et la consigne.

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{Ki + bKs}{Ki + Ks} \frac{G(s)Gc(s)}{1 + G(s)Gc(s)} = G_{sp}(s) \quad (1.11)$$

$$\text{où } Gc(s) = K + \frac{Ki}{s}$$

De même, pour le PI à deux degrés de liberté, on obtient la fonction de transfert entre la sortie et la perturbation de charge :

$$\frac{Y(s)}{L(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)Gc(s)} \quad (1.12)$$

Les relations (1.11) et (1.12) nous montrent encore une fois que nous avons bien affaire à un système à deux degrés de liberté. En effet, K et Ki influencent à la fois le suivi de consigne et le rejet de perturbations alors que b n'influence lui que le suivi de consigne. Une telle structure sera mise à profit pour découpler le rejet de perturbations du suivi de consigne. Ceci explique donc que le réglage du paramètre b se fera en dernier lieu.

Une manière de donner des spécifications sur le suivi de consigne sera de spécifier un pic de résonance sur la fonction de transfert $G_{sp}(s)$ à savoir :

$$M_{sp} = \max_{0 \leq \omega < \infty} |G_{sp}(i\omega)| \quad (1.13)$$

En conséquence de quoi, la valeur b sera déterminée de manière à satisfaire la relation (1.13).

On peut déjà remarquer que la valeur de b devra être comprise dans l'intervalle $[0,1]$. En effet :

- Un b négatif introduirait un zéro instable dans la fonction de transfert $G_{sp}(s)$; la réponse à un échelon de consigne serait une réponse adverse caractérisée par une excursion négative de la réponse ainsi que d'un temps de réponse supérieur par rapport au cas où $b > 0$.
- Introduisons $T(s)$ comme étant la fonction inverse de sensibilité. Elle sera définie par :

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{G(s)Gc(s)}{1 + G(s)Gc(s)} \quad (1.14)$$

Soit $M_p = \max |T(s)|$, la valeur du pic de résonance de la fonction $T(s)$.

Au vu des relations (1.11) et (1.14), on voit que si $b < 1$, alors $M_{sp} < M_p$.

Le paramètre b de l'action feedforward permettra donc de diminuer le pic de résonance de la fonction de transfert par rapport à la situation où ce terme feedforward n'est pas présent.

Une manière rigoureuse de régler le paramètre b dans le cas du PI sera expliquée dans le paragraphe 2.2.1.

Des résultats tout à fait semblables peuvent être obtenus à partir du même raisonnement dans le cas du PID à deux degrés de liberté. La seule différence par rapport au PI sera que le gain K_d interviendra en plus des gains K et K_i dans la boucle de feedback.

1.4 Conclusions

Nous avons défini les objectifs d'une bonne régulation pour des processus de type industriel. Les chapitres suivants définiront des problèmes d'optimisation en rapport avec ces objectifs par des régulateurs à deux degrés de liberté de type PI (chapitre 2) et de type PID (chapitre 4 et chapitre 6).

Nous avons également réalisé dans ce chapitre des synthèses à l'aide de méthodes qualitatives sur des structures de régulation à un degré de liberté.

La traduction des spécifications a fait apparaître les grandeurs M_s et IE pour juger respectivement le degré de robustesse et l'efficacité du rejet de perturbations.

Il sera intéressant d'obtenir les grandeurs M_s et IE pour les synthèses PI et PID à un degré de liberté réalisées dans ce chapitre en vue de comparer ces résultats avec ceux qui seront obtenus ultérieurement (tableau 1.1)

	M_s	IE
PI	1,31	194,45
PID	1,62	66,93

Tableau 1.1 : Valeurs de M_s et IE obtenues pour les synthèses PI et PID à un degré de liberté.

Chapitre 2.

Réglage d'un contrôleur PI à partir d'un problème d'optimisation : aspects théoriques et simulations

Ce chapitre a pour but de formuler un problème d'optimisation en rapport avec les objectifs de régulation définis à la section 1.3.2. Le réglage du contrôleur PI effectué dans ce chapitre est basé sur une méthode d'optimisation récemment proposée dans la littérature (1998) et due à K.J. Åström [8].

La méthode proposée dans cet article formule le problème de design comme un problème d'optimisation : il s'agit d'optimiser le rejet de perturbations en apportant des contraintes supplémentaires sur la sensibilité et sur le suivi de consigne. La formulation d'un tel problème de design capture donc ainsi trois aspects essentiels d'une bonne régulation discutés au chapitre 1. Le problème d'optimisation se réduit alors à un problème algébrique pour lequel un algorithme itératif efficace sera développé.

Le régulateur PI a déjà été défini au chapitre 1. Pour rappel, le régulateur PI est décrit par la relation suivante :

$$u(t) = K(b y_{sp}(t) - y(t)) + Ki \int_0^t (y_{sp}(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (2.1)$$

Nous pouvons alors représenter la boucle de régulation en terme de schéma-blocs (figure 2.1)

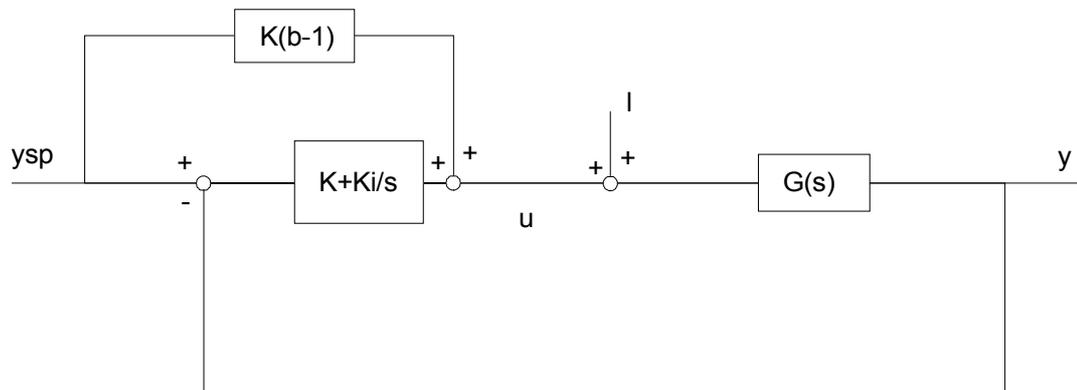


Figure 2.1 : Boucle de régulation.

Cette figure fait clairement apparaître que le contrôleur possède deux degrés de liberté lorsque le paramètre b diffère de 1. Remarquons que ce schéma est différent du schéma de la figure 1.9, mais il peut s'y ramener. Il a l'avantage de montrer que cette boucle est composée d'un terme de feedback ainsi que d'un terme de feedforward.

2.1 Problème d'optimisation

2.1.1 Formulation du problème d'optimisation

Rappelons que le but premier de notre régulateur sera d'obtenir un bon rejet de perturbations ainsi qu'une bonne robustesse aux erreurs de modèle. Le problème d'optimisation formule cela. L'ajustement du paramètre b ne rentrera pas directement dans le cadre du problème d'optimisation mais sera examiné après celui-ci.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que :

- Un bon rejet de perturbations était synonyme d'un grand K_i
- Pour obtenir une certaine robustesse aux erreurs de modèle, la courbe de Nyquist $G_c(s) G(s)$ devait satisfaire à une certaine condition d'encerclement.

PREMIÈRE FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION :

Trouver les paramètres K , K_i du régulateur de manière :

- (1) à maximiser K_i ;
- (2) à ce que la boucle fermée soit stable.
- (3) et à ce que la courbe de Nyquist de $G(s) G_c(s)$ se trouve à l'extérieur du cercle centré en -1 dans le plan de Nyquist et de rayon $1/M_s$.

La deuxième condition n'est pas anodine : l'action intégrale est une action très déstabilisante. Cela se traduit dans le plan de Nyquist, lorsque l'on augmente le gain intégral, par un rapprochement de la courbe de Nyquist du point -1 .

Si l'on se contentait exclusivement des conditions (1) et (3), une situation possible au problème d'optimisation dans le plan de Nyquist pourrait alors être celle décrite à la figure 2.2.

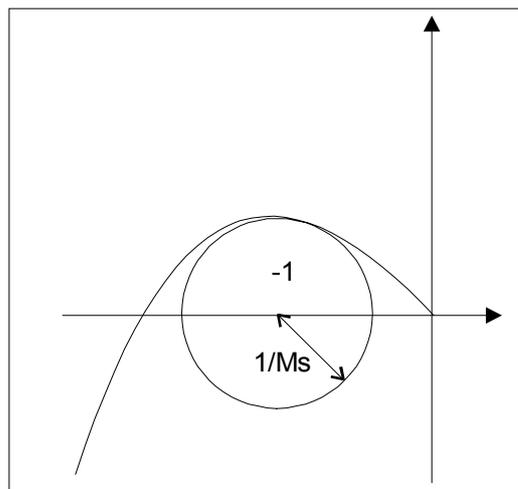


Figure 2.2 : Situation non désirée

Une telle situation est évidemment inacceptable car le système en boucle fermée est instable.

De plus, en augmentant encore le K_i relatif à la courbe de Nyquist dessinée à la figure 2.2, on obtiendrait une courbe de Nyquist supérieure à celle dessinée à la figure 2.2, satisfaisant dès lors encore mieux à la première condition tout en respectant encore la troisième condition. Le gain intégral pourrait alors devenir arbitrairement grand. La condition (2) est donc nécessaire pour avoir un problème bien posé.

Introduisons $L(s) = (K + K_i / s) G(s)$ ainsi que la fonction f telle que :

$$f(K, K_i, \omega) = \left| C + \left(K - i \frac{K_i}{\omega} \right) G(i\omega) \right|^2 \quad (2.2)$$

Cette fonction f représente le carré de la distance entre le centre du cercle de coordonnées $(-C, 0)$ et $L(i\omega)$. Le rayon de ce cercle sera noté R par la suite.

FORMULATION FINALE DU PROBLÈME D'OPTIMISATION :

Trouver K et K_i tels que :

- (1) $\max K_i$
- (2) la boucle fermée soit STABLE.
- (3) $f(K, K_i, \omega) \geq R^2$ (2.3)

Pour la suite des développements, il sera plus commode de travailler les parties réelles et imaginaires de $G(i\omega)$:

$$G(i\omega) = \alpha(i\omega) + i\beta(i\omega) = r e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\text{où} \quad \alpha(\omega) = r(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

$$\beta(\omega) = r(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

Nous pouvons alors réexprimer la fonction $f(K, K_i, \omega)$ en fonction de $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ et $r(\omega)$.

$$f(K, K_i, \omega) = C^2 + 2C\alpha(\omega)K + 2C\frac{\beta(\omega)}{\omega}K_i + r^2(\omega)K^2 + \frac{r^2(\omega)}{\omega^2}K_i^2 \quad (2.4)$$

Dans la suite, l'argument ω sera omis volontairement de manière à simplifier l'écriture des relations.

2.1.2 Contrainte de sensibilité

La contrainte de sensibilité exprimée par la relation (2.3) possède une interprétation géométrique remarquable :

En effet, en partant de la relation (2.4) et en complétant les carrés parfaits, on obtient, en se servant de la relation (2.3) :

$$\frac{\left(K + \frac{C\alpha}{r^2} \right)^2}{\left(\frac{R^2}{r^2} \right)} + \frac{\left(K_i + \frac{C\beta\omega}{r^2} \right)^2}{\left(\frac{R^2\omega^2}{r^2} \right)} > 1$$

Pour ω fixé, cette dernière relation représente l'extérieur d'une ellipse dans le plan $K_i - K$. Cette ellipse a ses axes parallèles à ceux des axes K et K_i

Pour $0 \leq \omega < \infty$, les ellipses successives génèrent des enveloppes qui définissent l'ensemble des paramètres (K et K_i) qui satisfont la contrainte de sensibilité.

Remarquons encore que f est quadratique en K_i ; l'enveloppe de sensibilité sera alors constituée de deux branches ; seulement une de ces branches correspondra à une boucle fermée stable.

La figure 2.3 illustre la contrainte de sensibilité dans le plan $K_i - K$. Il est évident que les enveloppes seront différentes les unes des autres en fonction des systèmes étudiés. D'autres formes d'enveloppe que celle représentée à la figure 2.3 peuvent intervenir ; cependant, ces autres formes d'enveloppe se rencontrent rarement. Nous n'en parlerons pas ici. Le lecteur intéressé se référera à [8].

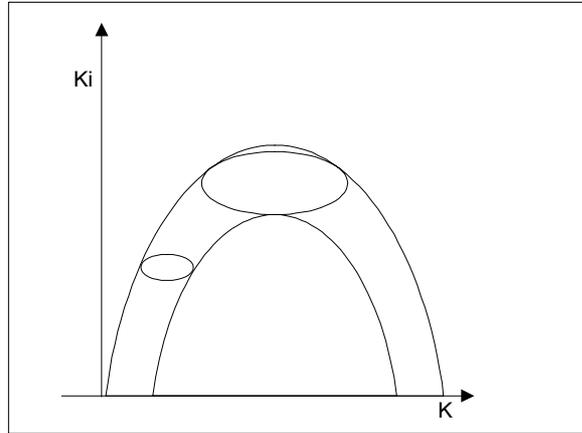


Figure 2.3 . *Forme d'enveloppe classiquement rencontrée.*

L'ensemble des couples (K, K_i) satisfaisant la contrainte de sensibilité sera alors l'ensemble des points du premier quadrant compris entre l'axe des K et la branche inférieure de l'enveloppe.

2.1.3 Stabilité

Au paragraphe précédent, on a exprimé la contrainte de sensibilité dans le plan $K_i - K$. Dans cette section, on fera de même pour la contrainte de stabilité.

Nous savons, par le critère de stabilité dans le plan de Nyquist, que la stabilité marginale sera atteinte quand la courbe de Nyquist passe par le point -1 ; cela reviendra à imposer un cercle de centre -1 et de rayon 0 .

On obtiendra alors le K et K_i correspondant à la limite de stabilité en imposant dans (2.4) un $C = 1$ et un $R = 0$. Nous obtiendrons alors après calcul :

$$\left| \left(1 + K\alpha + \frac{K_i}{\omega} \beta \right)^2 + i \left(\beta K - \frac{K_i}{\omega} \alpha \right)^2 \right| = 0$$

Cette dernière relation exprime que le module d'un nombre complexe est nul. Les parties réelles et imaginaires seront nulles à leur tour. Nous aurons alors à résoudre un système de deux équations à 2 inconnues (K et K_i). La solution de ce système est :

$$\begin{cases} K = -\frac{\alpha}{r^2} \\ K_i = -\omega \frac{\beta}{r^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les valeurs précédentes de K et K_i sont les valeurs maximales à ne pas dépasser afin que la boucle fermée reste stable. Ces valeurs seront utiles ultérieurement.

2.1.4 Optimisation

Rappelons que l'on désire aussi maximiser le K_i . On comprend aisément que, pour une contrainte de stabilité donnée, le K_i optimal se situera sur l'enveloppe (cf figure 2.3) ; la courbe de Nyquist sera tangente au cercle de sensibilité.

Cette section expose les résultats principaux de [8]. Le lecteur est renvoyé à [8] pour les détails. Il sera possible de trouver l'expression algébrique de l'enveloppe et de caractériser alors le couple optimal (K, K_i) au sens où nous l'avons défini également de manière algébrique.

Afin de trouver le couple K et K_i optimal, nous devons d'abord résoudre une équation non-linéaire en ω :

$$h(\omega) = 2R \left((R + C \sin \varphi) \left(\frac{r'}{r} - \frac{1}{\omega} \right) - C \varphi' \cos \varphi \right) \quad (2.6)$$

En résolvant (2.6), on trouvera une fréquence ω_0 . Le couple (K, K_i) optimal sera donné dans les relations (2.7) en calculant $r(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en $\omega = \omega_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = -C \frac{\alpha}{r^2} = C \frac{1}{r} \cos \varphi \\ K_i = -\frac{\omega \beta c}{r^2} - \frac{\omega R}{r} = -\frac{\omega}{r} (C \sin \varphi + R) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Notons à cet égard que les solutions de K et K_i données en (2.7) sont compatibles avec les K et K_i à la limite de l'instabilité (relation 2.5).

L'équation (2.6) sera résolue de manière itérative. Pour ce genre de résolution numérique, il faudra choisir de bonnes conditions initiales afin d'assurer une convergence rapide.

Il est possible de démontrer que pour une certaine classe de systèmes (systèmes à fonction de transfert monotone), il est possible de fournir de bonnes conditions initiales pour la résolution de l'équation (2.6). Le théorème suivant formalise cela.

Théorème :

Dénotons ω_φ comme étant la fréquence à laquelle le système a la phase φ . On suppose que le gain statique du système est positif et que

$$\frac{d \arg G(i\omega)}{d\omega} < 0, \\ \frac{d \log_{10} |G(i\omega)|}{d \log_{10} \omega} < 1$$

Dans ces conditions, il existe une solution à l'équation (2.6) dans l'intervalle

$$\omega_{90} < \omega < \omega_+ = \omega_{180 - \arcsin\left(\frac{R}{C}\right)}$$

Démonstration :

Nous avons démontré ce résultat dans l'annexe A.

2.2 Méthode complète de Design

Le problème d'optimisation précédent nous permet de trouver K et Ki de manière à optimiser le rejet de perturbations en gardant une contrainte sur la sensibilité aux erreurs de modèle. Il restera alors à déterminer b pour obtenir le meilleur suivi de consigne possible. Ceci sera fait dans le paragraphe suivant. Rappelons encore une fois que le bruit intervenant dans le système sera étudié au chapitre 3, après la phase d'expérimentation.

2.2.1 Suivi de consigne

Nous avons vu au paragraphe 1.3.2.3 que le suivi de consigne était gouverné par la fonction de transfert $G_{sp}(s)$. Nous y avons également démontré que si $0 \leq b \leq 1$, alors $M_{sp} \leq M_p$.

Nous choisirons dans cette section une manière de régler le paramètre b. On fera l'hypothèse que le maximum de $|G_{sp}(i\omega)|$ a lieu à la fréquence ω_{mp} où ω_{mp} est le maximum de $|T(i\omega)|$ ($T(s)$ étant définie par la relation 1.14).

Dans ces conditions, afin de minimiser l'overshoot dans le suivi de consigne, le paramètre b sera choisi tel que :

$$|G_{sp}(i\omega_{mp})| = 1 \quad (2.8)$$

en respectant que $b \in [0, 1]$.

En utilisant les relations (1.11) et (2.8), on aura :

$$b = \begin{cases} \frac{\sqrt{K^2 \omega_{mp} - Ki^2 (M_p^2 - 1)}}{K \omega_{mp} M_p} & si \left(\frac{\omega_{mp} K}{Ki} \right)^2 \geq M_p^2 - 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette manière de choisir le paramètre b sera discutée lors des simulations.

2.2.2 Méthode finale

Nous résumerons ici la méthode de design complète. Un algorithme implémentant cette méthode sera expliqué à la section 2.3.

- (1) Choisir Ms
Calculer C et R.
- (2) Déterminer un intervalle de recherche pour la résolution de l'équation $h(\omega)=0$. Il sera à ce titre intéressant de voir si le système satisfait aux hypothèses du théorème de la section 2.1.4.

Dans ce cas, l'intervalle de recherche sera : $\left[\omega_{90}, \omega_{180 - \arcsin\left(\frac{R}{C}\right)} \right]$

- (3) Résolution itérative de l'équation $h(\omega)=0$. On obtiendra alors ω_0 tel que $h(\omega_0) = 0$. Il sera alors possible d'obtenir K et Ki via les relations 2.7.
- (4) Détermination de b via l'équation 2.9.

2.3 Algorithme

Cette section développe l'implémentation MATLAB de l'algorithme résumé dans la section 2.2.1. Au lieu d'en livrer le code brut, il m'a paru plus intéressant d'expliquer les différentes étapes de cet algorithme. L'accent sera également mis sur les primitives intéressantes utilisées.

L'algorithme procède donc en plusieurs étapes :

- (1) On introduira d'abord les données du problème : M_s ainsi que la fonction de transfert du système, $G(s)$.
- (2) On calculera ensuite l'intervalle de résolution de l'équation 2.6. Cet intervalle sera noté $[\omega_1, \omega_h]$.
 - Si le système est monotone, alors en vertu du théorème formulé au paragraphe 2.1.4, l'intervalle de résolution de (2.6) sera : $[\omega_1, \omega_h] = [\omega_{90}, \omega_+]$
 - Si par contre, le système ne satisfait pas aux hypothèses de ce théorème, alors $[\omega_1, \omega_h]$ sera un intervalle par défaut, choisi de manière à ce qu'il soit suffisamment grand en fonction du système à réguler.
- (3) On calculera alors $r(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ ainsi que leur dérivée. La commande MATLAB

```
[ mag , phase ] = bode ( num, den, ω )
```

où num et den sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert $G(s)$ et où ω correspond à $[\omega_1, \omega_h]$ défini au point (2), nous donnera directement $r(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

Nous devons aussi obtenir r' et φ' . Le calcul de ces dérivées se fera en manipulant des polynômes. La commande

```
p = polyfit (x, y, n)
```

retourne le polynôme p de degré n permettant d'approcher la courbe $y = f(x)$ au sens des moindres carrés.

Nous procéderons à une telle interpolation pour $r(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en lieu et place de deux vecteurs. L'intérêt de procéder de la sorte réside dans le calcul de $r'(\omega)$ et $\varphi'(\omega)$.

En effet, la commande MATLAB

```
q = polyder (p)
```

permet d'obtenir le polynôme q dérivé du polynôme p , et de ce fait, on ne devra pas se risquer à employer une procédure de dérivation numérique. En procédant de la sorte, on obtiendra alors $r'(\omega)$ et $\varphi'(\omega)$ sous forme de polynôme.

A titre d'exemple, la figure 2.4 illustre la procédure d'interpolation de $r(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ au sens des moindres carrés à l'aide de polynômes de degré 6

2.4 Simulations

Celles-ci seront axées sur le Three-Tank et plus particulièrement sur la fonction de transfert obtenue par linéarisation au chapitre 1. Afin d'analyser au mieux les résultats obtenus, on scindera l'étape d'optimisation du réglage du terme feedforward (paramètre b).

2.4.1 Simulations sans l'action feedforward

2.4.1.1 Principe des simulations

Lors de ces simulations on se servira des paramètres K et K_i donnés par l'algorithme décrit au paragraphe 2.3 (on reprend les étapes 1 à 6 incluses). Le paramètre b réglant le terme feedforward intervenant dans le régulateur sera mis à un. Le régulateur comportera alors un seul degré de liberté. L'algorithme sera utilisé pour différentes valeurs de M_s variant de 1,2 à 2 ; on obtiendra alors les différents K et K_i correspondants.

Les signaux utilisés pour simuler le suivi de consigne et le rejet de perturbations seront des échelons unitaires, de manière à simuler au mieux la réalité. En effet, si cela se comprend bien pour le suivi de consigne, cela peut paraître moins trivial pour le rejet de perturbations. Dans la pratique, à la perturbation correspond l'ouverture d'une vanne de fuite, ce qui est équivalent à un débit de fuite plus ou moins constant.

2.4.1.2 Résultats de simulations

On fait varier M_s entre 1,2 et 2 et l'on observe l'évolution du suivi de consigne et du rejet de perturbations.

En particulier, on sera attentif à la comparaison entre la quantité IE et la quantité IAE calculées toutes les deux à l'aide du signal d'erreur relatif à une perturbation. Ceci permettra de voir si notre critère de rejet de perturbations était bien choisi (voir paragraphe 1.3.2.1).

La figure 2.6 montre la forme des réponses obtenues lorsque l'on passe de M_s valant initialement 1,2 puis 1,4 et puis finalement 1,6.

Notons que le rejet de perturbations sera définitif vu que le paramètre b n'influencera pas celui-ci. On pourra lors de l'étape suivante ajuster le paramètre b , de manière à améliorer le suivi de consigne.

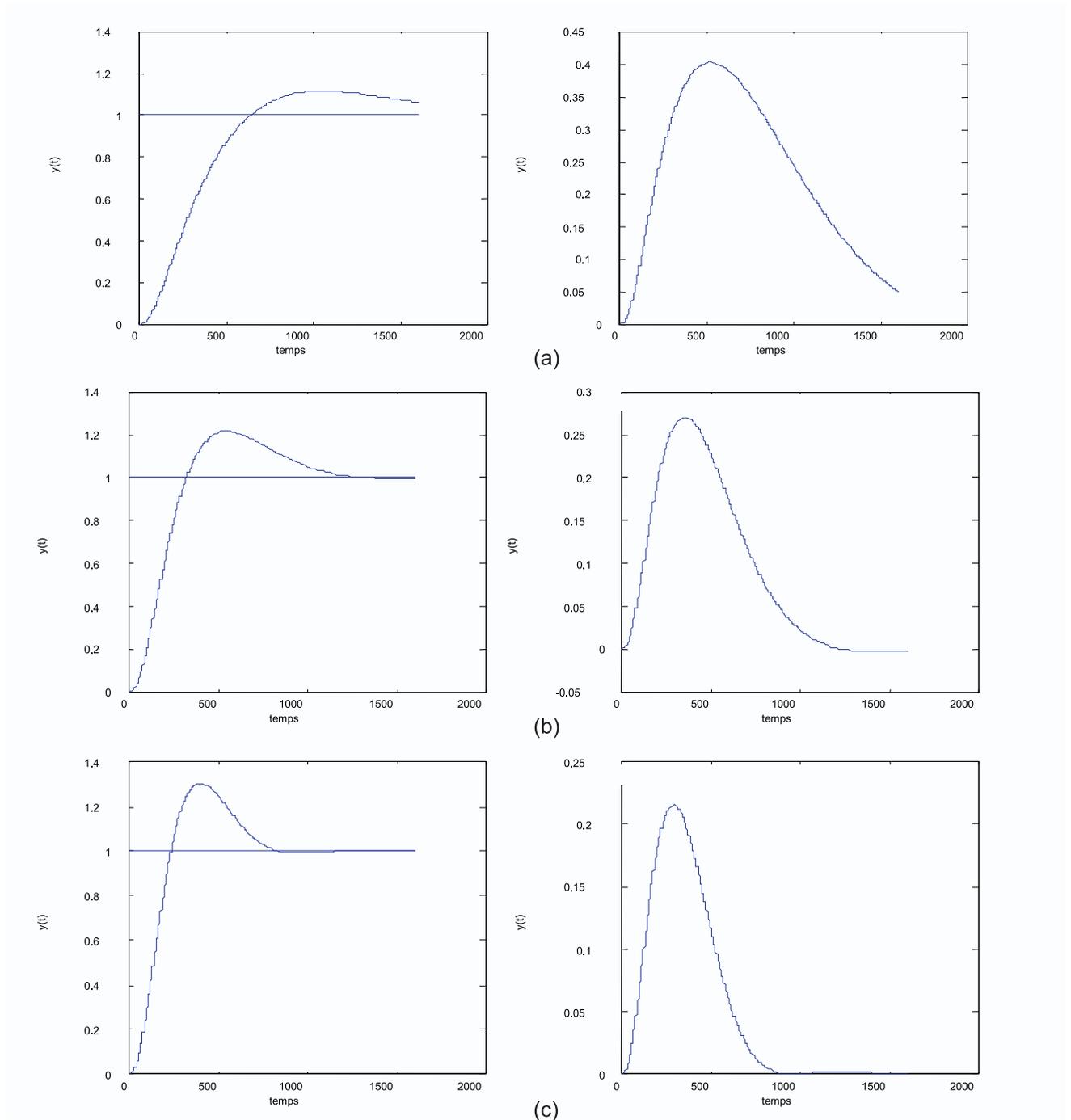


Figure 2.6 : Evolution du suivi de consigne (à gauche) et du rejet de perturbations (à droite) pour (a) $M_s = 1,2$ (b) $M_s = 1,4$ (c) $M_s = 1,6$.

Les informations tirées de ces graphiques sont recueillies dans le tableau 2.1. Celui-ci donne pour un M_s fixé, le K et le K_i , l'overshoot et le temps de réponse du suivi de consigne ainsi que l'IE et l'IAE obtenus pour un échelon unitaire de perturbation.

M_s	K	K_i	PO	Tr	IE	IAE
1,2	1,38	0,0027	12%	640 sec	368,11	368,11
1,4	2,57	0,0069	21%	325 sec	145,52	147,08
1,6	3,64	0,0117	30%	240 sec	85,58	85,58
1,8	4,60	0,0160	40%	200 sec	60,24	60,84
2,0	5,43	0,0214	45%	180 sec	46,75	48,78

Tableau 2.1 : Evolution en fonction de M_s de K , K_i , du pourcentage d'overshoot (PO) du suivi de consigne, du temps de réponse du suivi de consigne (Tr), ainsi que de l'IE et l'IAE calculés sur base du signal d'erreur obtenu lors d'un échelon unitaire de perturbation.

Plusieurs commentaires peuvent être émis au vu de la figure 2.6 et du tableau 2.1 :

- (1) Plus M_s augmente et plus K_i augmente et donc meilleur sera le rejet de perturbations. Cela se comprend facilement : en augmentant M_s , le rayon du cercle de sensibilité diminue et donc, cela permet à la courbe de Nyquist de se rapprocher plus près du point $(-1, 0)$. Ce rapprochement ne pourrait se faire qu'en augmentant l'action intégrale, "déstabilisante" par nature. La figure 2.7 illustre ce phénomène.
- (2) Il est utile de comparer l'IE à l'IAE afin de voir si on a utilisé un critère adéquat de rejet de perturbations.

Au vu du tableau 2.1, il n'y a que de bien minimes différences entre les quantités IE et IAE. Maximiser le K_i sera donc dans notre cas, une traduction excellente pour obtenir le meilleur rejet de perturbations possible.

Remarquons que nous avons affaire dans tous les cas à des réponses oscillatoires mais très bien amorties. Le signal d'erreur à un échelon unitaire de perturbation sera dès lors positif la quasi-totalité du temps, d'où $IE = IAE$.

- (3) Lorsque M_s augmente, K augmente également et donc on augmente la bande passante du système et par conséquent de manière équivalente le temps de réponse diminue (tableau 2.1). En plus de cela, la courbe de Nyquist se rapproche de $(-1, 0)$, c'est-à-dire la marge de phase du système diminue et l'on constate donc bien une augmentation de l'overshoot. Ceci est observé dans le tableau 1 ainsi qu'à la figure 2.6.

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus dans cette section avec ceux obtenus avec un PI à un seul degré de liberté (tableau 1.1 et section 1.2.3).

Il est surprenant de remarquer que les valeurs de M_s et IE pour le PI à un degré de liberté se positionnent très bien dans le tableau 2.1.

D'où la question: existe-t-il un réel avantage à utiliser des méthodes d'optimisation?

La réponse est oui. L'avantage que procure la méthode d'optimisation par rapport aux méthodes simples est de fournir un moyen rapide pour estimer les performances et la robustesse en jouant sur deux paramètres de synthèse : M_s et b .

C'est là un avantage d'importance qui permettra de tenter de satisfaire des objectifs précis de régulation.

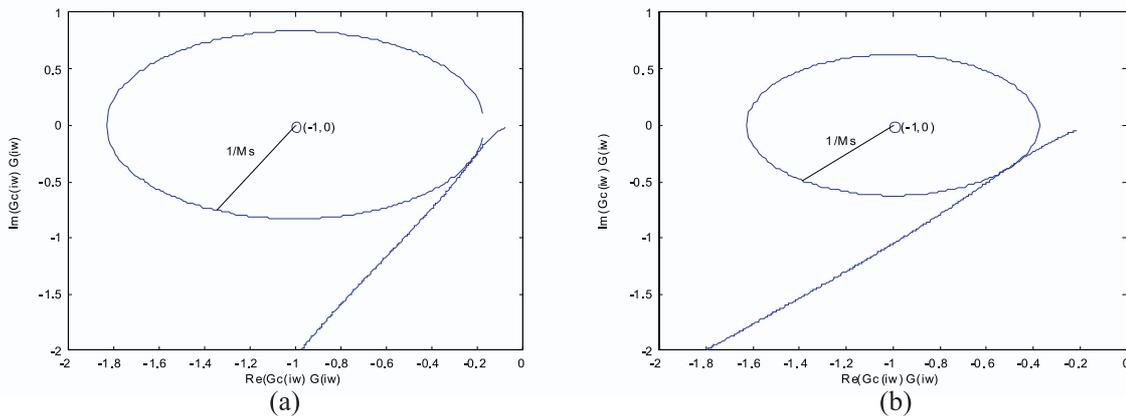


Figure 2.7 : Diagramme de Nyquist pour (a) $M_s = 1,2$ et (b) $M_s = 1,6$. La courbe de Nyquist ne touche le cercle de sensibilité qu'en un seul point.

2.4.1.3 Conclusions

Au vu des observations 1 et 3 énoncées à la section précédente, nous voyons apparaître un compromis entre performance et robustesse. Ce compromis sera influencé par l'intérêt de la régulation. En effet, si le système à réguler est déjà très robuste, on pourra prendre un M_s grand.

Mais un M_s grand signifie un grand overshoot (on montre dans la section suivante, qu'un grand overshoot sera difficilement combattu en ajustant b) malgré un temps de réponse au suivi de consigne ainsi qu'un rejet de perturbations excellents.

Si, par contre, le système à réguler est très peu robuste et que l'on désire que le système en boucle fermée présente une certaine robustesse, on aura intérêt à choisir un M_s petit, ce qui sera synonyme d'un temps de réponse désastreux ainsi que d'un rejet de perturbations pas fameux, malgré un overshoot relativement faible.

Au vu de ceci, M_s sera donc un paramètre de l'algorithme qu'il importe de bien régler. On ne peut pas gagner sur tous les tableaux simultanément.

2.4.2 Simulations avec l'action feedforward

Les résultats de suivi de consigne présentés à la section 2.4.1 présentaient des dépassements énormes. L'action feedforward (réglage du paramètre b) permettra de diminuer de tels dépassements.

2.4.2.1 Résultats de simulations et améliorations des résultats

Une manière de régler le paramètre b a déjà été présentée au paragraphe 2.2.1. Nous l'utiliserons dans un premier temps, afin d'avoir une idée des résultats obtenus. Nous ne nous concentrerons plus que sur le suivi de consigne, le rejet de perturbations étant indépendant du paramètre b . Les résultats obtenus sont recueillis dans le tableau 2.2.

Ms	K	Ki	PO	Tr	IE	b(*)	Mp(**)
1,2	1,38	0,0027	5 %	750 sec	368,11	0,73	1,11
1,4	2,57	0,0069	7 %	430 sec	145,52	0,65	1,25
1,6	3,64	0,0117	8,5 %	320 sec	85,58	0,61	1,38
1,8	4,60	0,0160	9 %	275 sec	60,24	0,57	1,51
2,0	5,43	0,0214	10 %	260 sec	46,75	0,47	1,71

Tableau 2.2 : Evolution en fonction de Ms de K, Ki, b, du pourcentage d'overshoot (PO) du suivi de consigne, du temps de réponse du suivi de consigne (Tr), ainsi que de l'IE (inchangé par rapport au tableau 2.1) .

(*) : b calculé par la méthode énoncée au paragraphe 2.2.1;

(**) : Pour rappel, Mp est le maximum de $T(i\omega)$.

Cette méthode s'avère probante pour la diminution du dépassement. Le temps de réponse obtenu après réglage de l'action feedforward sera cependant supérieur à celui obtenu lorsque l'action feedforward n'est pas présente ($b = 1$). Ces comparaisons sont faites avec le tableau 2.1.

Cette méthode est néanmoins basée sur une hypothèse selon laquelle $T(i\omega)$ et $Gsp(i\omega)$ ont leur maximum à la même fréquence, à savoir à la fréquence ω_{mp} . On peut facilement vérifier le bien-fondé de cette hypothèse par un exemple.

Prenons $Ms = 1,6$; dans ce cas, $T(i\omega)$ aura son maximum en $\omega_{mp} = 0,0058$ rad/sec. La figure 2.8 montre alors dans ce cas le diagramme de Bode de $Gsp(i\omega)$. On remarque sur cette figure que l'on obtient bien 0 dB à la fréquence ω_{mp} (b est calculé de manière à vérifier cette propriété), mais que les fréquences en dessous de ω_{mp} sont amplifiées. Le maximum de $Gsp(i\omega)$ sera donc différent du maximum de $T(i\omega)$. Notre hypothèse ne sera donc pas vérifiée. Néanmoins, il importe de remarquer que l'ajustement du paramètre b par cette méthode permet de passer d'un dépassement de 30 % à un dépassement de 8,5 %. Ce résultat nous semble déjà bon en soi.

Néanmoins, si nous nous rappelons des suivis de consigne obtenus au chapitre 1, tous les résultats obtenus au tableau 2.2 sont bien plus mauvais que ceux obtenus au chapitre 1. Supposons que nous voulions par exemple obtenir un dépassement de maximum 6 % et un temps de réponse de l'ordre de 300 secondes pour un échelon de consigne unitaire. Comment pourrait-on améliorer les résultats donnés par cet algorithme ?

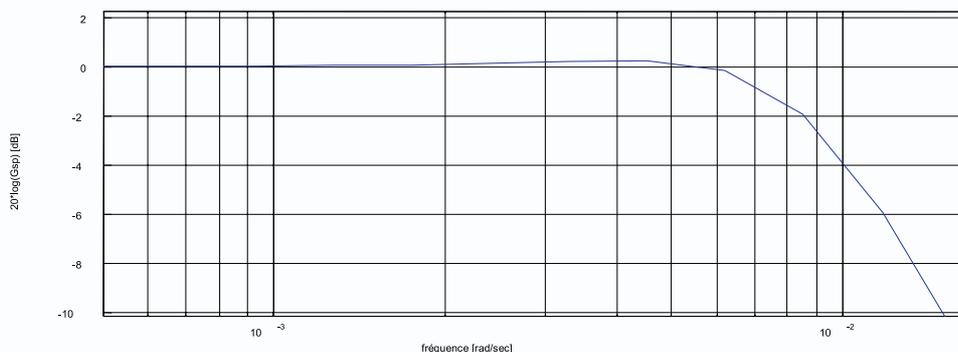


Figure 2.8 : Diagramme de Bode (amplitude) de $Gsp(i\omega)$ pour $Ms=1,6$, $b=0,61$, $K=3,64$, $Ki=0,0117$.

D'autres méthodes de réglage du paramètre b ont été essayées. Vis-à-vis d'un objectif aussi précis (dépassement et temps de réponse respectivement inférieurs à 6 % et 300 secondes), elles se sont également avérées peu pratiques. Les trois dernières lignes du tableau 3.1 étant assez proches de notre objectif en terme de suivi de consigne, un réglage fin autour de la valeur de b donnée par l'algorithme de base pourra améliorer les choses. Il importe alors de savoir si il faut augmenter ou diminuer le paramètre b par rapport à sa valeur initiale.

La littérature définit le temps de réponse d'un système de beaucoup de manières différentes. Avec certaines de celles-ci, il est souvent difficile de trouver une expression analytique du temps de réponse d'un système. D'autres, comme celle rappelée dans l'annexe A, permettent de contrecarrer cette difficulté. Au vu de ce rappel et de l'expression (1.11), nous pouvons donc écrire que le temps de réponse pour notre structure de régulation sera

$$T_{rep} = t^*(K, K_i, G(s)) + \frac{K}{K_i}(1 - b) \quad (2.10)$$

où $t^*(K, K_i, G(s))$ est le temps de réponse de $T(s)$; le second terme dans l'expression (2.10) est le temps de réponse propre à $(K_i + K b s) / (K_i + K s)$. Ce dernier résultat nous permet donc de voir que diminuer b , augmentera le temps de réponse et vice-versa. Le temps de réponse minimal (maximal) sera obtenu lorsque $b=1$ ($b=0$).

Nous pouvons donc affirmer que le paramètre b introduit un compromis entre le dépassement et le temps de réponse :

- Une diminution de b se traduira par une diminution du dépassement, mais par une augmentation du temps de réponse.
- Une augmentation de b se traduira par une diminution du temps de réponse, mais par une augmentation du dépassement.

Revenons alors à notre objectif précis (6 % de dépassement, temps de réponse de 300 secondes). Nous pouvons d'ores et déjà déduire du tableau 2.2 que nos objectifs de dépassement et de temps de réponse ne pourraient pas être atteints simultanément pour n'importe quelle valeur de M_s .

Supposons qu'un dépassement inférieur à 6 % soit notre objectif principal. En jouant finement sur le paramètre b de la manière décrite précédemment, on obtient les résultats regroupés dans le tableau 2.3.

M_s	K	K_i	PO	Tr	b
1,2	1,38	0,0027	6 %	745 sec	0,75
1,4	2,57	0,0069	6 %	450 sec	0,62
1,6	3,64	0,0117	6 %	340 sec	0,55
1,8	4,60	0,0160	6 %	300 sec	0,51
2,0	5,43	0,0214	6 %	280 sec	0,43

Tableau 2.3 : Ajustement de b afin d'obtenir un suivi de consigne présentant un dépassement de 6%.

Ce tableau est en tout point conforme à nos attentes. De plus, on remarque que notre objectif de suivi de consigne sera réalisé en utilisant un M_s supérieur ou égal à 1,8. Obtenir les performances souhaitées impliquera donc de choisir une grande valeur de M_s . Ceci n'exprime rien d'autre qu'un compromis robustesse-performance.

2.4.3 Robustesse

Le paragraphe précédent nous a permis de voir qu'imposer trop vite un facteur M_s , n'est pas une chose souhaitée en fonction du compromis robustesse-performance établi.

On remarque également que les performances de suivi de consigne obtenues pour $M_s=1,6$ et $M_s=1,8$ diffèrent peu; la seule différence se situant au niveau des temps de réponse (300 secondes versus 340 secondes). Passant d'un $M_s=1,8$ à un $M_s=1,6$, on aura néanmoins accru la robustesse du système.

De manière pratique, il importera également de ne pas sacrifier la robustesse du système au profit des performances. Supposons par exemple que nous désirions faire la synthèse d'un régulateur qui conserve assez bien certaines performances sur une certaine plage de fonctionnement. Dans ce cas, il sera plutôt indiqué de choisir un petit M_s .

Nous pouvons montrer cela dans le cadre du Three-Tank: la synthèse du régulateur est faite autour du modèle de départ (point de fonctionnement de h_2 est égal à 24.5 cm) et nous voulons que les performances de régulation soient aussi peu dégradées que possible sur une plage de 10 cm pour h_2 . Nous aurons pour cela à notre disposition une deuxième fonction de transfert, obtenue après linéarisation autour du point de fonctionnement $h_2 = 33$ cm. On peut maintenant comparer le comportement du système autour de 33 cm avec les valeurs de M_s égales à 1,6 et 1,8, les valeurs des paramètres K , K_i , b sont celles données par le modèle de départ ($h_2^*=24,5$ cm).

La figure 2.9 montre les résultats de suivi de consigne et de rejet de perturbations pour $M_s=1,6$, à la fois pour le modèle de départ ($h_2^*=24,5$ cm) et pour le second modèle ($h_2^*=33$ cm). La figure 2.10 montre ces mêmes résultats, mais pour $M_s=1,8$.

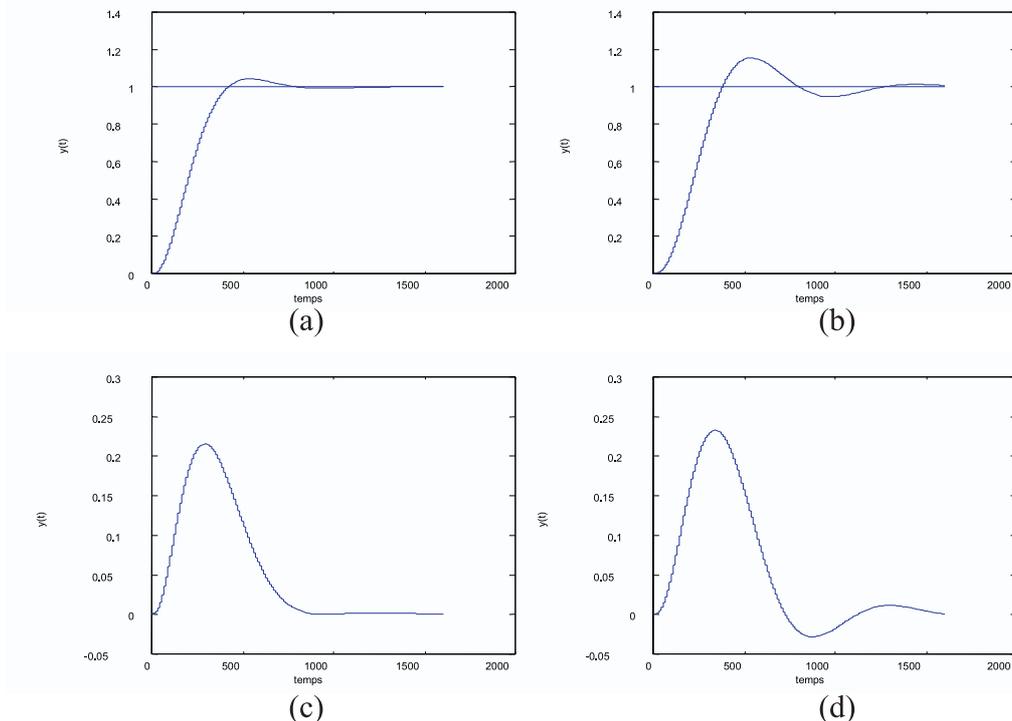


Figure 2.9: Réponses obtenues pour $M_s=1,6$, $K=3,60$, $K_i=0,0117$, $b=0,61$; Les réponses (a) et (c) sont relatives au modèle de départ ($h_2^*=24,5$ cm), tandis que (b) et (d) sont relatives au second modèle ($h_2^*=33$ cm).

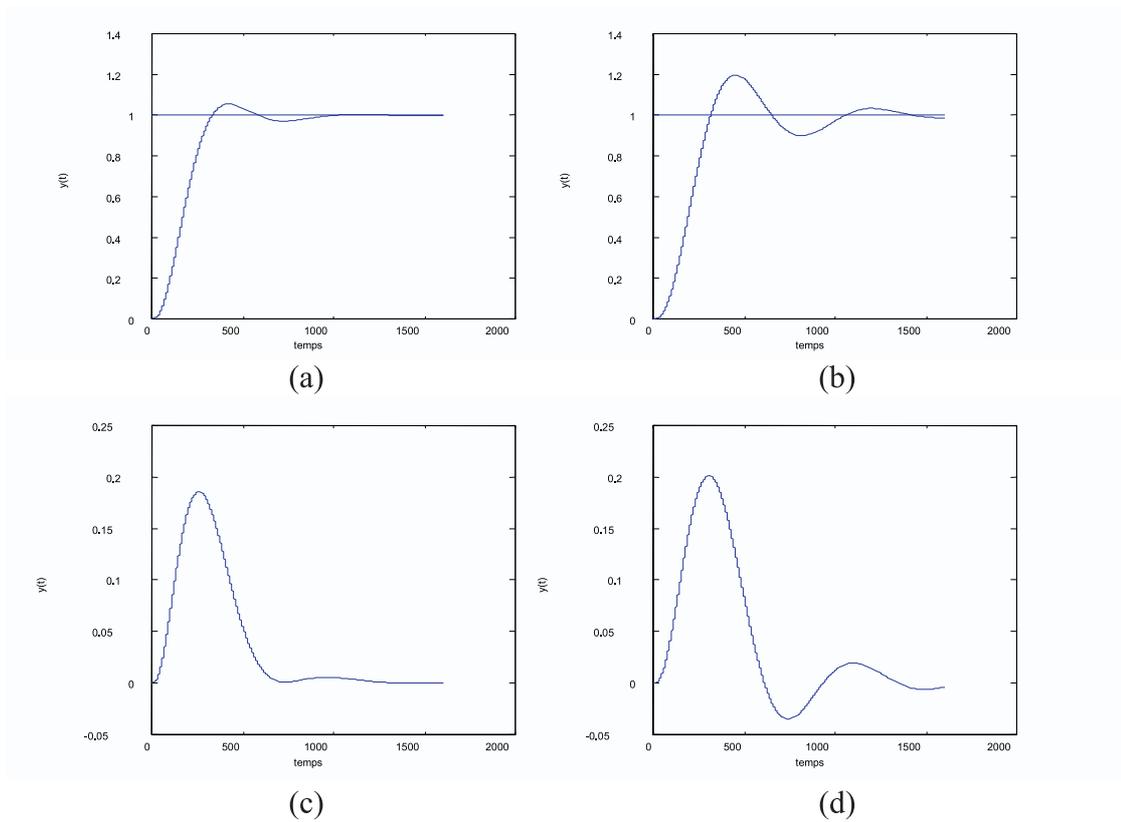


Figure 2.10: Comparaison des réponses obtenues pour $M_s=1,8$, $K=4,60$, $K_i=0,0160$ et $b=0,57$ avec le modèle de départ ($h2^*=24,5\text{cm}$) -figures (a) et (c) - et avec le second modèle ($h2^*=33\text{cm}$) -figures (b) et (d).

En comparant les figures 2.9 et 2.10, on s'aperçoit que pour le second modèle ($h2^*=33\text{cm}$), le suivi de consigne aura un dépassement de 16% dans le cas de $M_s=1,6$ et un dépassement de 20 % dans le cas de $M_s=1,8$. De plus, les réponses de suivi de consigne et de rejet de perturbations deviennent beaucoup plus oscillantes que dans le cas du modèle de base ($h2^*=24.5\text{ cm}$). On remarque cependant que les réponses autour de $h2^*=33\text{ cm}$ sont moins oscillantes pour $M_s=1,6$ que pour $M_s=1,8$.

Cela peut très bien se comprendre dans le plan de Nyquist (figure 2.11): La figure 2.11 (a) montre pour $M_s=1,6$, le rapprochement de la courbe de Nyquist du point $(-1,0)$ lorsque l'on passe de $h2^*=24,5\text{ cm}$ à $h2^*=33\text{cm}$. La figure 2.11 (b) montre la même chose mais pour $M_s=1,8$.

Chapitre 3.

Réglage d'un PI à partir d'un problème d'optimisation: aspects pratiques et expérimentaux

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de simulations afin de trouver les gains les plus appropriés pour réaliser les objectifs de la régulation.

Ce chapitre traitera de l'implémentation du régulateur PI à deux degrés de liberté décrit au chapitre précédent avant de livrer les résultats expérimentaux réalisés sur le Three-Tank du laboratoire de Systèmes et d'Automatique.

3.1 Système échantillonné

La synthèse du chapitre précédent a été réalisée dans le domaine temps-continu. Il est cependant pratique courante actuellement d'implémenter les contrôleurs de type PID en utilisant des microcontrôleurs. Plusieurs problèmes tels que l'échantillonnage, la discrétisation, ... devront être considérés en relation avec l'implémentation digitale.

3.1.1 Discrétisation

En vue d'implémenter le PI temps-continu à l'aide d'un ordinateur, il est nécessaire d'approximer de manière numérique l'action I et l'action P qui apparaissent dans la loi de commande (1.3).

- Action Proportionnelle :

Le terme proportionnel $P(t)$ dans la loi de commande est : $P(t)=K(b y_{sp}(t) - y(t))$. Ce terme sera simplement implémenté en remplaçant les variables continues en variables discrètes :

$$P(t_k) = K (b y_{sp}(t_k) - y(t_k))$$

où $\{t_k\}$ dénote les instants d'échantillonnage.

- Action Intégrale :

Le terme intégral qui intervient dans la loi de commande est donné par $I(t) = Ki \int_0^t e(\tau) d\tau$

Il s'en suit que l'on écrira que :

$$\frac{dI}{dt}(t) = Ki \cdot e(t)$$

On pourra par exemple approximer cette dérivée par la règle d'Euler rétrograde:

$$\frac{I(t_k) - I(t_{k-1})}{T} = Ki e(t_k)$$

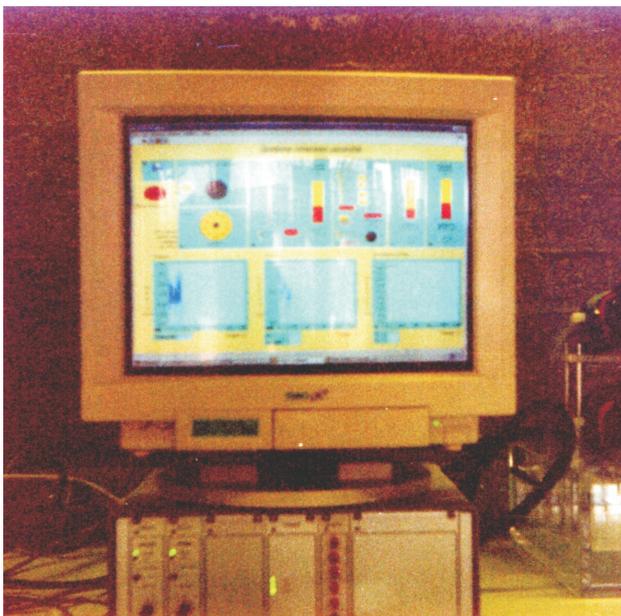
On arrivera alors à l'implémentation récursive suivante :

$$I(t_k) = I(t_{k-1}) + \frac{Ki}{T} e(t_k)$$

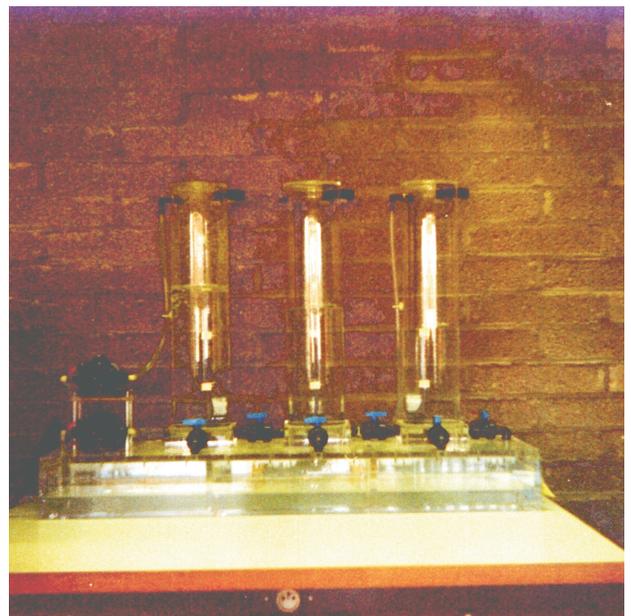
3.1.2 Implémentation Labview du régulateur

Le régulateur digital a été réalisé en langage Labview. Le programme Labview utilisé permettra bien sûr de commander le système mais aussi de rapatrier facilement les données expérimentales.

Ce programme génère le signal de commande désiré et envoie l'information à un convertisseur D/A lequel pilote la pompe P1 du Three-Tank. Un capteur de pression mesure la pression d'eau dans le réservoir de droite. Cette information est recueillie par un convertisseur A/D et transformée en hauteur d'eau. Les convertisseurs sont également munis de filtres d'antirepliment fonctionnant en rapport avec la fréquence d'échantillonnage. Le système complet est montré à la figure 3.1. Un écran de contrôle permettra de régler la hauteur de consigne et de modifier les gains du régulateur ainsi que la fréquence d'échantillonnage (figure 3.1 (a)).



(a)



(b)

Figure 3.1:(a) Système de commande et d'acquisition de données. (b) Le Three-Tank.

3.1.3 Choix de la fréquence d'échantillonnage

Le régulateur étant implémenté et les gains donnés par l'algorithme d'optimisation, l'objectif suivant consistera à choisir une fréquence d'échantillonnage adéquate.

Théoriquement, vu que nous sommes partis d'une synthèse temps-continu, il faudrait utiliser la fréquence d'échantillonnage la plus grande possible. On sera limité dans cette voie par le hardware à notre disposition.

On comprend également facilement qu'une fréquence d'échantillonnage trop petite risquerait de dégrader les performances du régulateur.

Certes, des règles de bonne pratique sont couramment appliquées pour répondre à la question. Par exemple, une de celles-ci préconise la prise d'au moins 10 à 15 points d'échantillonnage par temps de réponse. Ces règles ne nous permettent cependant pas de juger les dégradations de performances dues à l'échantillonnage par rapport aux performances obtenues en temps-continu.

C'est pourquoi nous modéliserons le système échantillonné de manière à choisir une fréquence d'échantillonnage ne dégradant pas de manière excessive les performances obtenues en temps-continu.

L'implémentation digitale de la boucle de régulation est schématisée à la figure 3.2. Celle-ci montre clairement où interviennent les échantillonnages.

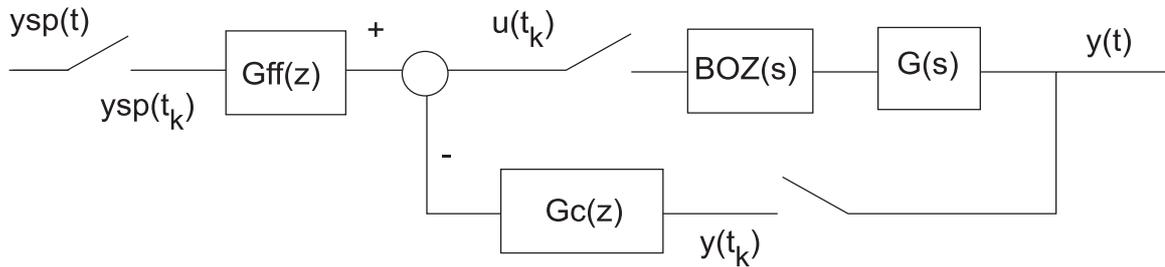


Figure 3.2: Implémentation digitale de la boucle de régulation.

Les expressions de $G_{ff}(z)$ et $G_c(z)$ seront trouvées à partir des équations aux différences obtenues après discrétisation du signal de commande temps-continu (paragraphe 3.1.1). On obtient :

$$G_{ff}(z) = \frac{(Kb + KiT)z - Kb}{z - 1}$$

$$G_c(z) = \frac{(K + KiT)z - K}{z - 1}$$

Le bloc BOZ (bloqueur d'ordre zéro), transforme une impulsion de hauteur x en un pulse de hauteur x et de longueur T . Il s'agit d'un bloc analogique caractérisé par la fonction de transfert $(1 - e^{-sT})/s$.

On s'efforcera de ne plus faire intervenir dans ce schéma que des signaux discrets et donc de trouver une fonction de transfert en z entre les signaux échantillonnés $y(t_k)$ et $u(t_k)$. Cette fonction – notée $G_{tot}(z)$ – sera donnée par :

$$G_{tot}(z) = Z[BOZ(s)G(s)]$$

$$= Z\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s}G(s)\right]$$

$$= (1 - z^{-1})Z[G(s)]$$

où $Z[\bullet]$ représente l'opération de transformée en z .

Le lecteur intéressé consultera [1] et [2] pour de plus amples informations sur ces calculs. Nous arriverons donc finalement au schéma-bloc de la figure 3.3 qui décrit le comportement de la boucle de régulation vue de l'ordinateur. Il sera utilisé pour les stimulations.

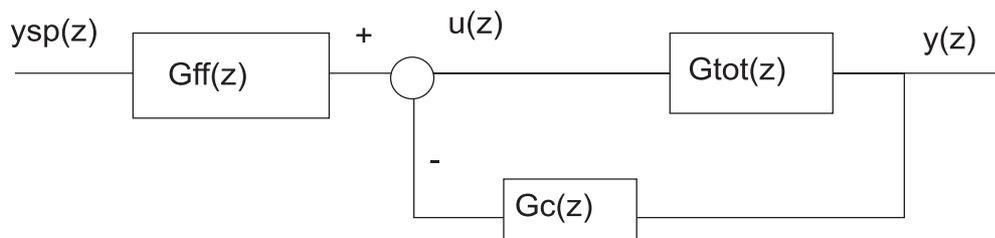


Figure 3.3: Modélisation dans la boucle de régulation exploitable pour les simulations.

C'est ainsi que sera par exemple observé l'effet de la fréquence d'échantillonnage sur le régulateur optimal de type 1 synthétisé au chapitre 2 – le temps de réponse et le PO relatifs au suivi de consigne étant respectivement de 280 sec et 6 %.

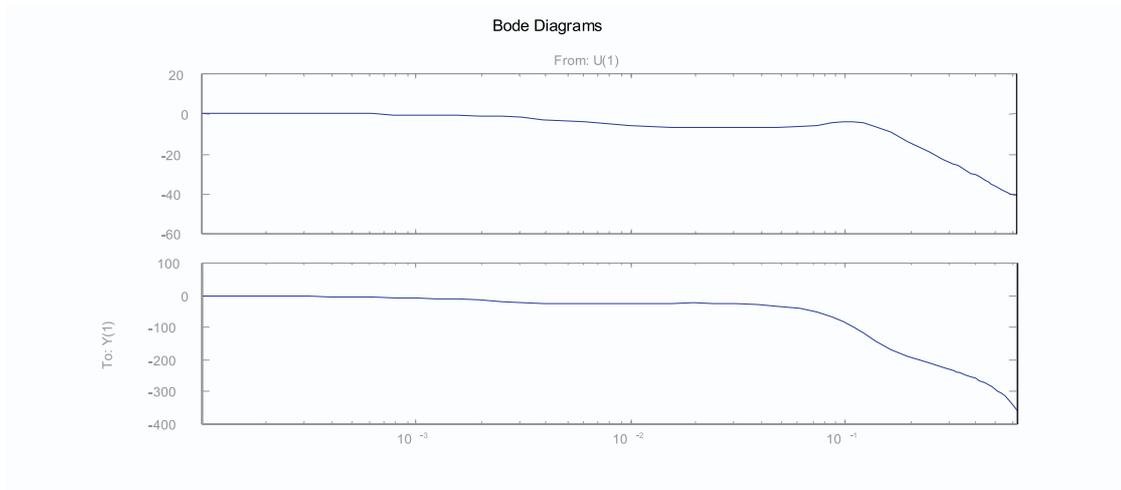


Figure 3.5: Diagramme de Bode relatif à la fonction de transfert entre y et y_{sp} . Echelle de fréquence entre 0 et $\frac{\omega_s}{2}$.

3.2 Saturation de l'actionneur.

Jusqu'à présent, nous avons supposé dans nos schémas de simulations que la pompe n'introduisait aucune dynamique supplémentaire. La seule chose que nous savons est qu'elle peut fournir un débit entre 0 et 100 ml/sec.

Nous avons également vu au chapitre 1 (section 1.2.1.) que des gains trop grands risqueraient de mener à un signal de commande d'amplitude énorme et donc d'aboutir à une saturation de l'actionneur. (signal de commande constant).

Si un terme intégral est présent, ce terme pourra devenir très grand et un signal d'erreur de signe contraire sera requis pendant une longue période de temps avant que les choses ne reviennent à la normale. Ceci est appelé le wind-up et il en résultera un long transitoire. Si une telle situation se produisait, il serait bon d'y remédier en incorporant dans notre régulateur un anti-wind-up ([6]).

Comment pouvons-nous voir si de telles saturations de l'actionneur peuvent se produire ?

L'idée la plus simple sera de confronter les commandes obtenues par simulation et expérimentalement (figure 3.6).

3.3.3 Conclusions

Ce chapitre nous permet de conclure à l'existence d'un excellent accord entre analyse théorique et expérimentation.

Nous avons néanmoins constaté que les réponses expérimentales présentaient de légères différences par rapport aux réponses simulées correspondantes. Ces différences ont pu être expliquées par les effets conjoints de l'échantillonnage et des non-linéarités du Three-Tank. On a également pu vérifier l'influence du paramètre M_s . Tout est donc conforme aux aspects théoriques du chapitre 2.

Chapitre 4.

Réglage d'un PID à partir d'un problème d'optimisation: aspects théoriques et simulations

Le chapitre 1 nous a permis de conclure que combiner l'action PI en basse fréquence et PD en haute fréquence permettait encore d'améliorer énormément les performances par rapport à la seule action PI.

Ce chapitre aura pour but de formuler un problème d'optimisation semblable à celui déjà formulé au chapitre 2 mais cette fois pour une structure de type PID.

Un article correspondant à ce problème - dû encore une fois à K.J Åström [9] - a déjà été publié dans la littérature. Néanmoins, comme nous le verrons, une telle formulation ne nous permettra pas de trouver un algorithme aussi efficace que celui trouvé pour le PI.

Il importera alors de voir comment utiliser l'algorithme élaboré à bon escient ou mieux, l'améliorer.

Le régulateur PID que nous allons employer ici a déjà été étudié au chapitre 1. Pour rappel, la loi de commande est :

$$u(t) = K(b ysp(t) - y(t)) + Ki \int_0^t (ysp(\tau) - y(\tau)) d\tau + Kd \left(-\frac{dy}{dt}(t) \right) \quad (4.1)$$

Nous pouvons alors représenter la boucle de régulation en terme de schéma-blocs (fig. 4.1). Nous voyons encore une fois que le paramètre b n'agira que sur le suivi de consigne.

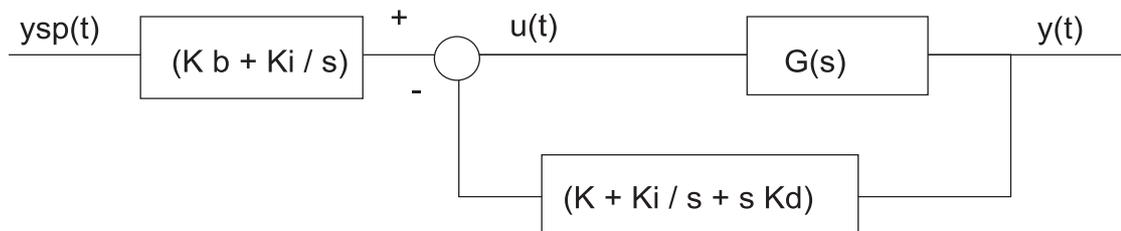


Figure 4.1 : Boucle de Régulation PID à deux degrés de liberté.

4.1 Problème d'optimisation

De manière tout à fait analogue au chapitre 2, le but premier de notre régulation sera d'obtenir un bon rejet de perturbations ainsi qu'une bonne robustesse aux erreurs de modèle. Le problème d'optimisation formule cela. L'ajustement du paramètre b sera examiné dans une seconde phase.

En rapport avec les traductions des spécifications (section 1.3.2.), nous serons alors à même de formuler ce problème.

FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION :

Nous devons trouver les paramètres K , Ki et Kd du régulateur de manière :

- (1) à maximiser Ki

- (2) et à ce que la courbe de Nyquist de $G(s)G_c(s)$ se trouve à l'extérieur du cercle centré en -1 dans le plan de Nyquist et de rayon $1/M_s$.

Nous ne nous préoccupons pas dans un premier temps de la contrainte de STABILITÉ de la boucle fermée. Il importera tout simplement de retenir à ce stade que, si nous parvenons à trouver des gains K, K_i, K_d satisfaisant les conditions (1) et (2), rien ne nous indique que ces gains mèneront à une instabilité de la boucle fermée ou pas.

Introduisons la fonction f telle que :

$$f(K, K_i, K_d, \omega) = \left| C + \left(K - \frac{i}{\omega}(K_i - \omega^2 K_d) \right) G(i\omega) \right|^2$$

Cette fonction représente le carré de la distance entre le centre du cercle de coordonnées $(-C, 0)$ et $G(i\omega)G_c(i\omega)$. Le rayon du cercle de sensibilité sera noté R par la suite.

FORMULATION FINALE DU PROBLÈME D'OPTIMISATION :

Trouver K, K_i et K_d tels que :

(1) $\max K_i$

(2) $f(K, K_i, K_d, \omega) \geq R^2, \forall \omega > 0$ (4.2)

4.1.1 Contrainte de sensibilité

La contrainte de sensibilité exprimée par la relation (4.2) possède une interprétation géométrique remarquable. En effet, en introduisant

$$G(i\omega) = r(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = \alpha(\omega) + i\beta(\omega),$$

La contrainte de sensibilité (4.2) pourra après développement se réécrire comme suit :

$$\frac{\left(K + \frac{\alpha \cdot c}{r^2} \right)^2}{\left(\frac{R^2}{r^2} \right)} + \frac{\left(K_i - \omega^2 K_d + \frac{\omega \cdot \beta \cdot c}{r^2} \right)^2}{\left(\frac{R^2 \omega^2}{r^2} \right)} \geq 1 \quad (4.3)$$

Pour ω et K_d fixés, la relation (4.3) représente l'extérieur d'une ellipse dans le plan $K - K_i$ dont les axes sont parallèles à ceux des axes K et K_i .

Lorsque ω varie, K_d étant fixé, ces ellipses formeront une enveloppe (figure 4.2 (a)). Il sera néanmoins très compliqué de calculer analytiquement la forme de l'enveloppe comme nous l'avons fait au chapitre 2, à cause de la présence dans ce cas-ci du K_d supplémentaire. Nous devons donc essayer de calculer l'enveloppe d'une autre manière.

La manière utilisée pour calculer cette enveloppe est expliquée sur la figure 4.2. Pour chaque ellipse i nous calculerons trois points :

- L_i : le point le plus à gauche de l'ellipse i .
- R_i : le point le plus à droite de l'ellipse i .
- B_i : le point le plus bas de l'ellipse i .

Ces points L_i, R_i et B_i sont représentés pour chaque ellipse i à la figure 4.2 (a).

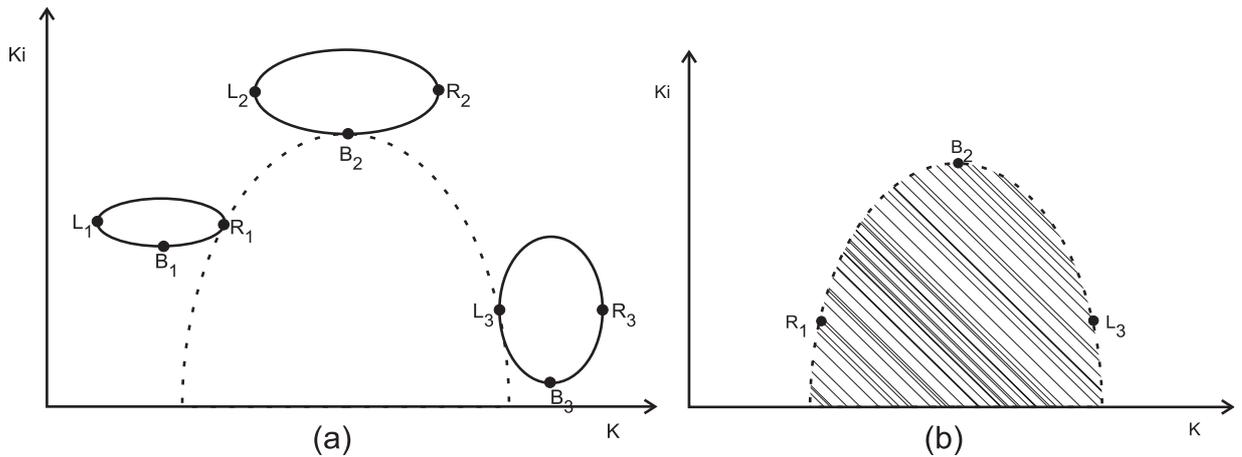


Figure 4.2 : Détermination du sous-ensemble de couples (K, K_i) satisfaisant la contrainte de sensibilité.

La figure 4.2 (b) nous laisse penser que si nous calculons ces points L_i, R_i et B_i pour suffisamment d'ellipses i , nous pourrions alors obtenir une bonne approximation de l'enveloppe.

Les points L_i et R_i seront donnés par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} K = -c \frac{\alpha}{r^2} \pm \frac{R}{r} \\ K_i = -c \frac{\omega \beta}{r^2} + \omega^2 \cdot K_d \end{cases} \quad (4.4)$$

où le signe - correspond à L_i et le signe + à R_i .

Le point B_i sera donné par les coordonnées :

$$\begin{cases} K = -c \frac{\alpha}{r^2} \\ K_i = -c \frac{\omega \beta}{r^2} + \omega^2 \cdot K_d - \frac{\omega \cdot R}{r} \end{cases} \quad (4.5)$$

L'ensemble des points entre l'axe des K et l'enveloppe ainsi définie est l'ensemble des couples vérifiant la contrainte de sensibilité (hachuré sur la figure 4.2). Cet ensemble devra nécessairement appartenir au premier quadrant de manière à garantir la positivité des gains.

4.1.2 Difficulté dans la résolution du problème

Jusqu'à présent, outre la formulation du problème d'optimisation, nous nous sommes attachés à traduire la contrainte de sensibilité de manière à en dériver une forme exploitable pour la résolution du problème.

Nous avons découvert un moyen de trouver l'ensemble des points K et K_i qui satisfont la contrainte de sensibilité mais cette fois-ci pour M_s et K_d fixés.

Ceci a toute son importance : cela signifie que nous pourrions trouver un triplet (K, K_i, K_d) mais uniquement pour K_d donné.

Dès lors, la seule manière de déterminer un triplet (K, Ki, Kd) sera de considérer Ms et Kd comme étant deux paramètres de l'algorithme.

On comprend tout de suite qu'il ne sera pas possible d'obtenir un algorithme aussi efficace que celui élaboré pour le PI du fait que Kd, qui en toute logique devrait être un résultat de l'algorithme, est ici un paramètre.

Nous avons néanmoins choisi de voir quels enseignements tirer de la méthode telle quelle. Ce but sera poursuivi tout au long de ce chapitre.

4.2 Design final

Nous nous sommes jusqu'à présent occupés des problèmes de rejet de perturbations et de sensibilité aux erreurs de modèle. Nous en viendrons alors au réglage du paramètre b (action feedforward) afin d'obtenir le meilleur suivi de consigne possible. L'influence du bruit sera étudiée dans le chapitre suivant qui sera consacré à la validation expérimentale des résultats obtenus dans ce chapitre.

4.2.1 Réglage de l'action feedforward

Nous choisirons dans cette section une manière de régler le paramètre b. La manière de trouver b dans le cadre du PID est similaire à celle déjà expliquée dans le cas du PI (cf section 2.2.1). On trouvera d'abord l'expression de la fonction de transfert - notée Gsp (s) - entre y et ysp :

$$G_{sp}(s) = \frac{K_i + K_b s}{K_i + K s + K_d s^2} \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

où $G_c(s) = K + \frac{K_i}{s} + s K_d$

On fait alors l'hypothèse que le maximum de $G_{sp}(i\omega)$ a lieu en $\omega = \omega_{mp}$ où ω_{mp} est la fréquence où a lieu le maximum de $G(i\omega) G_c(i\omega) / [1 + G(i\omega) G_c(i\omega)]$

Le paramètre b sera trouvé en imposant $|G_{sp}(i \omega_{mp})| = 1$;

Ce qui donne :

$$b = \begin{cases} \frac{\sqrt{A - K_i^2 M_p^2}}{K \omega_{mp} \cdot M_p} & si \quad A \geq K_i^2 M_p^2 \\ 0 & si \quad A \leq K_i^2 M_p^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

où $A = K^2 \cdot \omega_{mp}^2 + (K_i - \omega_{mp}^2 K_d)^2$

4.2.2 Méthode finale et algorithme

Nous résumerons ici la méthode complète de design. On y intégrera simultanément une description succincte de l'algorithme qui a été utilisé pour implémenter cette méthode :

- (1) Choix de Ms
Calcul de R (= 1 / Ms)
- (2) Choix d'un Kd
- (3) Choix d'un intervalle de fréquence $[\omega_0; \omega_n]$ suffisamment grand ($n \gg 1$) et suffisamment discrétisé ($\Delta\omega$ assez petit).

Un point ω_i de cet intervalle est tel que :

$$\omega_i = \omega_0 + i \Delta\omega \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

4.3 Simulations

Celles-ci seront axées sur le Three-Tank. On scindera l'étape d'optimisation de celle du réglage de l'action feedforward.

4.3.1 Simulations sans l'action feedforward

Cette réaction vise à tirer des enseignements de l'algorithme établi en 4.2.2 dans le cadre du Three-Tank.

4.3.1.1 Introduction

Notre contrainte de sensibilité peut se visualiser avantageusement dans le plan Nyquist. On aura dès lors tendance à analyser les résultats obtenus dans ce même plan, voire dans le plan de Bode, plus pratique pour visualiser les résultats. Cette section établit quelques résultats qui seront utilisés dans la suite.

Nous pouvons représenter la courbe $G_c(i\omega)G(i\omega)$ dans le plan de Nyquist pour K, K_i, K_d donnés (figure 4.3), l'expression de $G_c(i\omega)G(i\omega)$ étant donnée par :

$$G_c(i\omega)G(i\omega) = \left(K + \frac{K_i}{i\omega} + i\omega K_d \right) G(i\omega) \quad (4.7)$$

A une fréquence donnée, soit ω_0 , le vecteur \vec{V} dans le plan de Nyquist donnera l'information relative à la phase et à l'amplitude de $G_c(i\omega)G(i\omega)$ (voir figure 4.3).

Nous cherchons ensuite à savoir de quelle manière se déplace la courbe de Nyquist à la fréquence ω_0 donnée pour des variations des gains K, K_i et K_d .

L'expression (4.7) nous montre qu'en augmentant K, K_i et K_d restant constants, le point de la courbe de Nyquist à la fréquence ω_0 se déplacera dans la direction \vec{V} .

De même, une augmentation de K_i (respectivement K_d) - tout autre gain restant égal - déplacera le point de la courbe de Nyquist à la fréquence ω_0 dans la direction $-i\vec{V}$ (respectivement $i\vec{V}$). Ces informations sont également reprises à la figure (4.4).

Nous choisirons deux valeurs de K_d - ie 50 et 160 - pour un M_s de 1, 6. Les résultats se trouvent à la figure 4.5. Les valeurs de K et K_i correspondantes ainsi que la marge de phase (PM) et la fréquence de coupure (ω_c) du système sont regroupés dans le tableau 4.1.

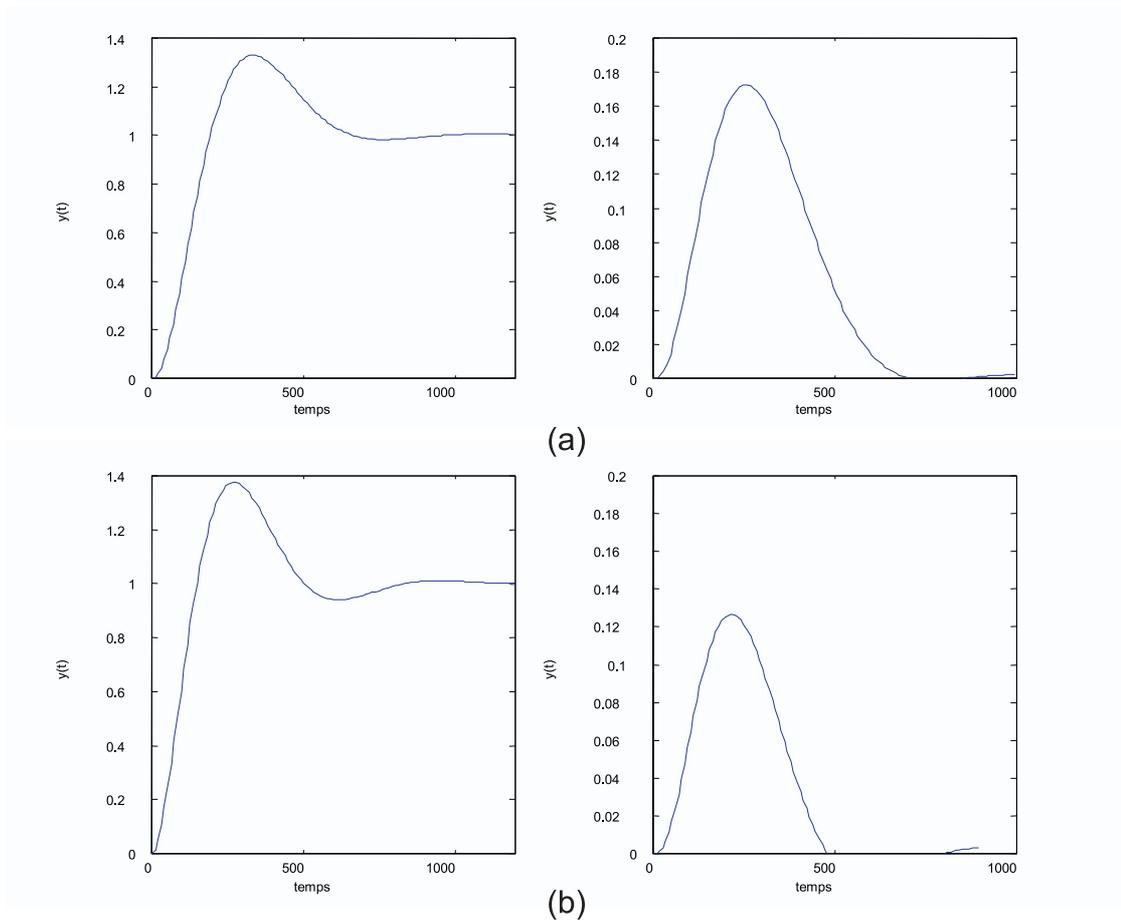


Figure 4.5 : Suivi de consigne et rejet de perturbations pour (a) $K_d = 50$ et (b) $K_d = 160$, M_s étant fixé à 1, 6.

K_d	K	K_i	PM ($^\circ$)	ω_c (rad/sec)
50	4, 8	0, 0175	42	0, 008
160	6, 5	0, 034	40	0, 010

Tableau 4.1 : Résultat de l'algorithme pour $K_d = 50$ et $K_d = 160$ ($M_s = 1, 6$).

Le tableau 4.1 montre que pour un M_s fixé, quand K_d augmente, il en est de même pour K et K_i . Ceci se répercutera en un meilleur rejet de perturbations et en un meilleur temps de réponse du suivi de consigne, ce qui se vérifie à la figure 4.5.

On retiendra dès lors que, à M_s fixé, il sera intéressant de choisir le plus grand K_d possible en vue d'améliorer les performances du système.

Ms	Ki	K	PM (°)	ω_c (rad/sec)
1, 6	0,025	5, 5	40	0, 0094
1, 4	0, 0165	4, 2	46	0, 0076
1, 2	0, 009	3	56	0, 0056

Tableau 4.2 : Gains K et K_i ainsi que la marge de phase (PM) et la fréquence de coupure ω_c du système correspondants pour des Ms de 1, 6, 1, 4 et 1, 2.

Les résultats du tableau 4.2 sont conformes à nos attentes :

- la diminution de K_i se traduira en terme de performance par une dégradation du rejet de perturbations.
- la diminution de K (qui va de pair avec la diminution de ω_c) entraînera une diminution du temps de réponse du suivi de consigne.

On vient ni plus ni moins de mettre encore une fois en évidence le compromis performance - robustesse ; imposer une robustesse excessive aura un effet néfaste d'un point de vue performance.

4.3.1.3 Limite de robustesse sur le K_d

Notre algorithme a mis en évidence le fait que pour des valeurs élevées de K_d couplées à de faibles valeurs de Ms, l'allure de la courbe de phase de $G(i\omega) G_c(i\omega)$ présentait de grandes variations de phase aux alentours de ω_c . Dans ce cas, de légères variations de gain déplaceront quelque peu la fréquence de coupure en changeant fortement la marge de phase (PM). Il s'en suit que les performances du système en seront fortement affectées.

La figure 4.7 montre les courbes de phase obtenues pour K_d valant respectivement 500 et 80.

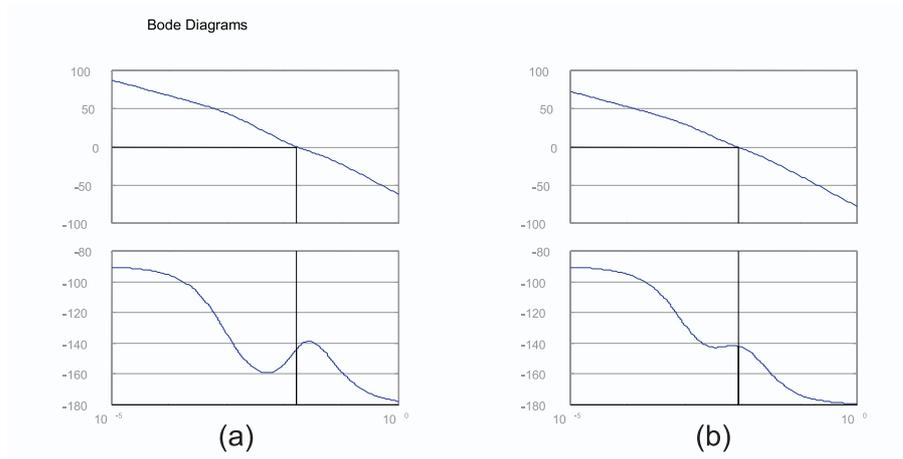


Figure 4.7 : Allure de la phase (diagramme du bas) de $G(i\omega) G_c(i\omega)$ pour des K_d de (a) 500 et (b) 80.

Il sera donc bon de choisir des valeurs de K_d qui ne mènent pas à de trop grandes variations de phase aux alentours de ω_c .

L'allure de la courbe de Nyquist correspondant à de grands K_d est donnée à la figure 4.8

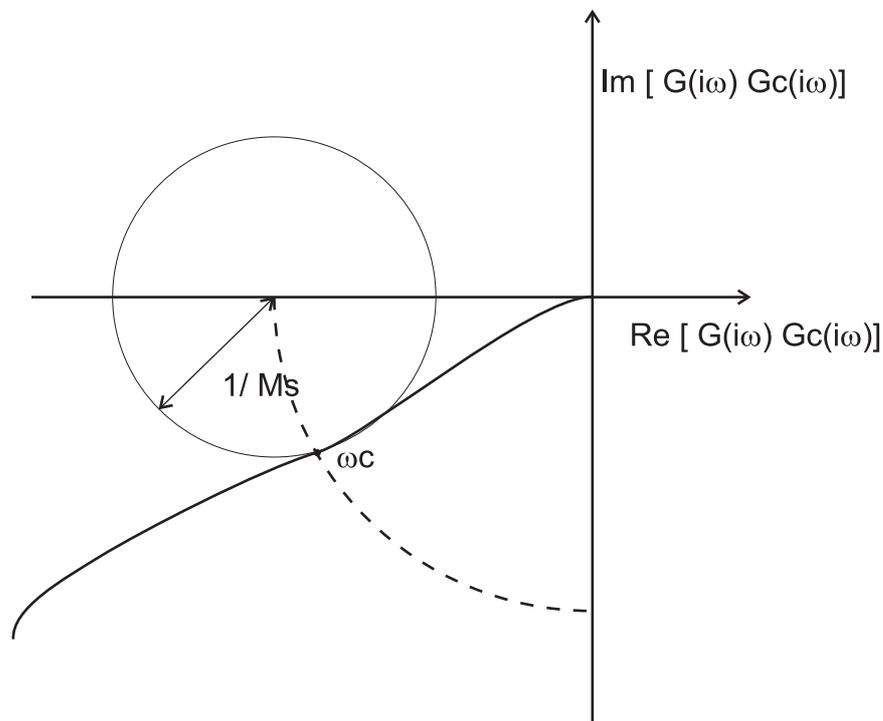


Figure 4.8 : Allure de la courbe de Nyquist pour de grands K_d .

On peut justifier le saut de phase ainsi : La concavité vers le haut de la courbe de Nyquist sera de plus en plus prononcée quand K_d augmente. De grands K_d mènent à de grands K et K_i et donc déplaceront l'asymptote basse fréquence vers la gauche (cf 4.3.1.1). Il sera alors nécessaire d'avoir une concavité dans la courbe de Nyquist de manière à joindre le comportement asymptotique basse fréquence et le comportement asymptotique haute fréquence. Notons encore que, vu que le K_i augmente lorsque le K_d augmente, et vu que ces deux gains agissent dans la même direction, mais dans un sens opposé, le K_d devra combattre l'effet de K_i qui vise à rapprocher la courbe du point $(-1, 0)$ - car le K_i augmente - et donc le K_d devra être très grand.

Ce phénomène peut également être dénommé compromis performance - robustesse puisque un K_d grand - synonyme d'excellente performance - dégrade la robustesse du système.

4.3.1.4 Conclusions

Sans entrer dans une analyse quantitative, les sections 4.3.1.2 et 4.3.1.3 nous ont permis de comprendre comment agir sur les paramètres K_d et M_s de notre algorithme en vue de satisfaire les inévitables compromis performance - robustesse.

Voici à titre d'exemple les gains K et K_i donnés par l'algorithme pour $M_s = 1, 6$ et pour des K_d de 100, 200 et 300 (Tableau 4.4).

K_d	K	K_i	b
100	5, 34	0, 0241	0, 41
200	7, 23	0, 0411	0, 15
300	9, 14	0, 0626	0, 10

Tableau 4.4 : Valeurs des gains K , K_i et b pour $M_s = 1, 6$ et des K_d de 100, 200 et 300.

Les performances correspondantes sont illustrées à la figure 4.10. Nous nous servirons de ces résultats dans la phase expérimentale.

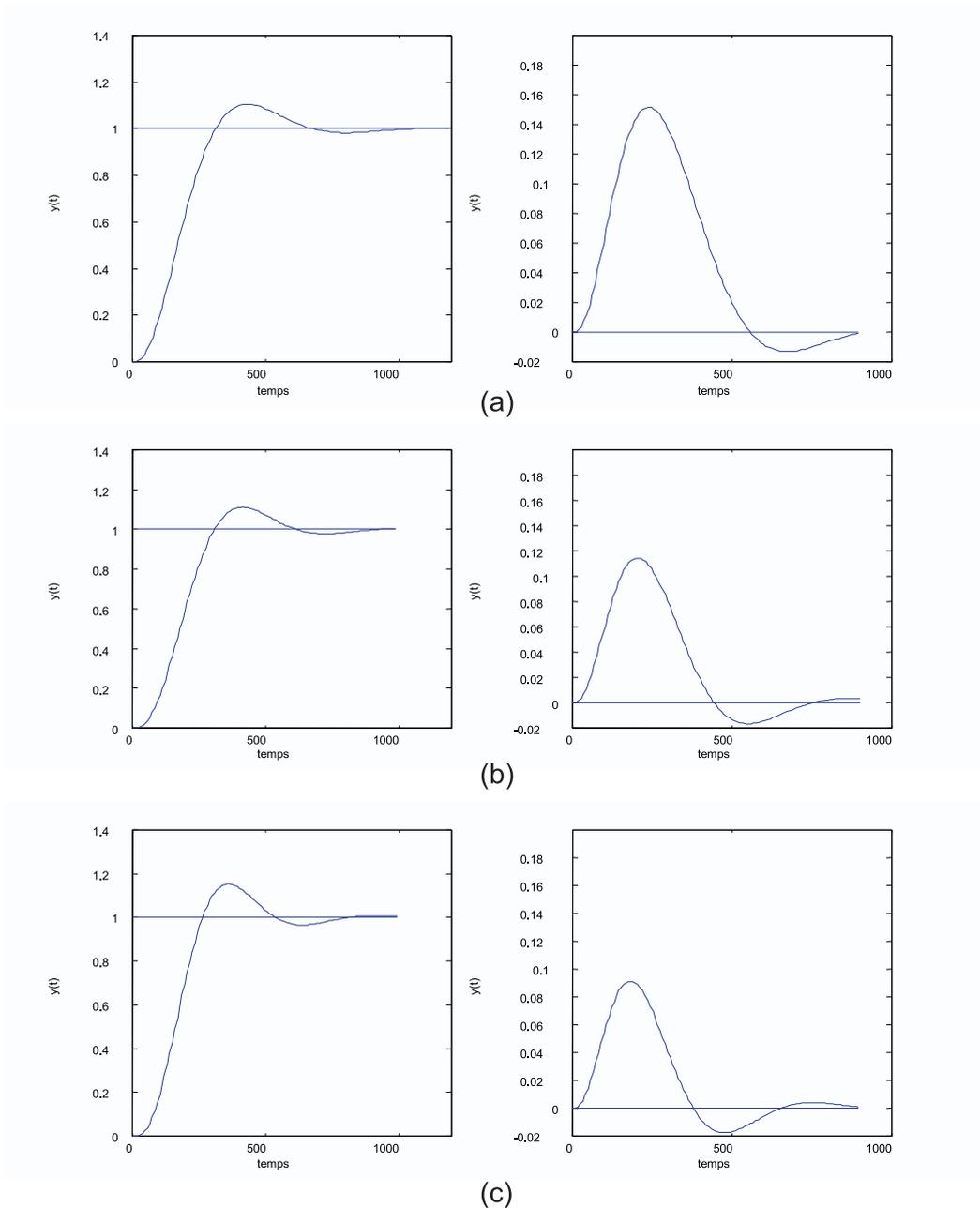


Figure 4.10 : Performances obtenues après ajustement de b pour (a) $K_d = 100$, (b) $K_d = 200$ et (c) $K_d = 300$ ($M_s = 1, 6$).

4.3.3 Conclusions

Nous étions conscients du fait que notre algorithme n'était pas d'un intérêt extraordinaire de par le fait que K_d est un paramètre de l'algorithme. Nous avons quand même pu localiser de manière quantitative des couples (M_s, K_d) alliant une certaine robustesse et certaines performances (Zone E de la figure 4.9).

Si la méthode de régulation proposée par K.J. Åström relative au PID permet d'obtenir des résultats satisfaisants, elle souffre néanmoins d'un manque de systématisme.

Les deux chapitres suivants tenteront de remédier à ce manquement.

Chapitre 5.

Réglage d'un PID à partir d'un problème d'optimisation : implémentation et expérimentation

L'algorithme établi au chapitre précédent nous permet de trouver les gains K et K_i pour K_d et M_s donnés. Nous avons décidé de passer directement à la phase expérimentale en vue de déterminer quel K_d utiliser. Nous procéderons aux expériences pour trois K_d différents. Le système sur lequel nous travaillerons sera une fois encore le Three-Tank.

5.1 Implémentation du PID

Les aspects à considérer relevant de l'implémentation dans le cas du PID sont semblables à ceux déjà discutés dans le cadre du PI. Nous ne réentamerons donc pas une discussion sur ces aspects. Néanmoins, nous nous sommes servis d'une nouvelle méthode pour juger quant aux éventuelles saturations de l'actionneur. Celle-ci est expliquée ci-après.

5.1.1 Saturation de l'actionneur

On comprend aisément que ce seront nos expériences de rejet de perturbations qui seront les plus contraignantes en terme d'éventuelles saturations de l'actionneur. Rappelons que la pompe du Three-Tank peut donner un débit u compris dans la plage $[0, 100]$ ml/sec.

Le signal de commande u dans le cas du PID à deux degrés de liberté peut se mettre sous la forme:

$$u = K(b \text{ ysp}(t) - y(t)) + I - K T_d \frac{dy}{dt} \quad (5.1)$$

On cherchera alors une condition à satisfaire pour qu'il n'y ait pas de saturation.

Nous définissons la bande proportionnelle comme étant un intervalle tel que l'actionneur ne sature pas si la valeur prédite du signal de sortie du système se trouve dans cet intervalle.

La valeur prédite du signal de sortie - notée y_p - sera de :

$$y_p = y + T_d \frac{dy}{dt}$$

Dès lors en se servant des valeurs minimale et maximale du signal de sortie de l'actionneur - notées u_{\min} et u_{\max} - on trouvera la bande proportionnelle $[y_{\text{low}} ; y_{\text{high}}]$ où y_{low} et y_{high} sont donnés par :

$$\begin{aligned} y_{\text{low}}(t) &= b \text{ ysp}(t) + \frac{(I - u_{\max})}{K} \\ y_{\text{high}}(t) &= b \text{ ysp}(t) + \left(\frac{I - u_{\min}}{K} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.3.2 Récapitulatif

A la fois ce chapitre et le chapitre 3 nous ont permis de comprendre les causes de la limitation du gain dérivé. Le chapitre 3 a attiré notre attention sur le fait que la bande passante du système (et donc le K_d) devait être choisie en fonction de la fréquence d'échantillonnage.

Les limitations sur le K_d dues aux éventuelles saturations des actionneurs et aux influences du bruit de mesure ont été discutées dans ce chapitre.

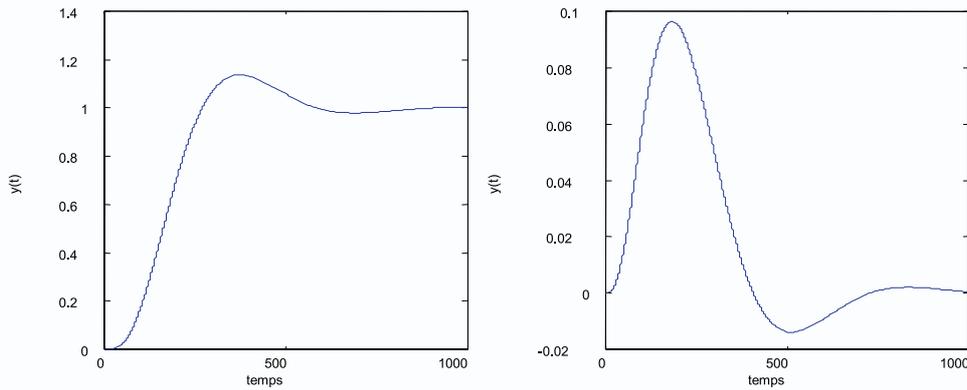


Figure 6. 9 : Réponses optimales du PID avec filtrage sur l'action dérivée dans le cas du Three-Tank.

Le tableau 6.1 donne également les valeurs des critères de performances classiques. Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus pour le PI (section 2.4.4).

Nous remarquons deux améliorations flagrantes apportées par le PID :

- Un meilleur rejet de perturbations (IE = 23,44 vs IE = 46,75).
- Une augmentation de la robustesse (Ms =1,55 vs Ms =2,00).

6.4 Comparaison PI - PID

Nous disposons à ce stade d'un algorithme permettant de trouver directement le gains d'un contrôleur PI (chapitre 4) ainsi que d'un algorithme permettant de trouver directement les gains d'un contrôleur PID avec filtrage sur l'action dérivée (chapitre 6). Il est dès lors intéressant de comparer les résultats obtenus dans ces deux cas pour d'autres systèmes que le Three-Tank.

L'article [8] de K.J Aström - article relatif à la méthode d'optimisation sur le PI - propose des résultats de simulations pour une large variété de systèmes. Nous avons repris certains de ces systèmes. Nous pourrions ainsi, par la même occasion vérifier l'exactitude de notre algorithme d'optimisation élaboré pour le PI en confrontant nos résultats pour ceux donnés dans l'article [8]. Voici les systèmes qui seront étudiés :

$$G1(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad G4(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$G14(s) = \frac{5}{(s+5)(s-1)}$$

Le système G1(s) est un système classique et relativement facile à commander. Le système G4(s) modélise un processus contenant un intégrateur ; il s'agit comme nous le verrons d'un processus plus difficile à réguler. Le système G14(s) modélise quant à lui un système instable.

Remarquons encore que pour l'algorithme relatif au PID, nous ne considérerons évidemment pas le critère sur le bruit et le critère relatif à la saturation de l'actionneur.

PI	Ms	K	Ki	b	IE	IE/IAE	Tr	PO		
	2,00	1,27	0,68	0,47	1,45	0,76	4,2 sec	10 %		
PID	Ms	Kd	K	Ki	b	N	IE	IE/IAE	Tr	PO
	1,6	3,00	5,2	2,8	0,1	7,4	0,33	0,86	3 sec	9 %

(a)

PI	Ms	K	Ki	b	IE	IE/IAE	Tr	PO		
	2,00	0,33	0,0417	0,50	24,00	0,96	8 sec	12%		
PID	Ms	Kd	K	Ki	b	N	IE	IE/IAE	Tr	PO
	1,65	2,00	2,00	0,78	0,1	11	1,26	0,83	4 sec	10 %

(b)

PI	Ms	K	Ki	b	IE	IE/IAE	Tr	PO		
	2,00	4,71	2,2	0,5	0,873	1	0,7 sec	0%		
PID	Ms	Kd	K	Ki	b	N	IE	IE/IAE	Tr	PO
	1,6	0,8	11	25	0,2	4,8	0,0375	0,83	0,5 sec	7 %

(c)

Tableau 6.2 : Paramètres et performances des systèmes (a) $G1(s)$, (b) $G4(s)$ et (c) $G14(s)$.

Nous procéderons alors à la comparaison PI/PID proprement dite. De manière générale, nous observons deux choses :

- (1) L'emploi du PID présente deux avantages importants par rapport au PI. En effet, la structure PID montre par rapport à la structure PI d'importantes améliorations au niveau du rejet de perturbations (cf IE) et au niveau de la robustesse (cf Ms) pour de légères améliorations sur le suivi de consigne.
- (2) Les gains relatifs au PID sont toujours beaucoup plus importants que les gains relatifs au PI.

Il est important de rappeler, au vu de la première observation, que nous avons travaillé - via l'algorithme PID élaboré dans ce chapitre - de manière à obtenir des performances robustes. Nous aurions pu également apporter de grandes améliorations sur le suivi de consigne en optant pour d'autres paramètres de design dans l'algorithme. Nous avons déjà insisté sur le fait que le suivi de consigne n'était généralement pas l'objectif premier dans le cadre d'une régulation industrielle. On comprend alors le bien-fondé de notre choix.

La deuxième observation nous incite cependant à la prudence : l'ajout d'un terme dérivé sera donc plus contraignant au niveau des actionneurs (saturations éventuelles), au niveau des effets engendrés par le bruit et au niveau de la fréquence d'échantillonnage (de grands gains K et K_d augmentent la bande passante, le risque d'aliasing étant alors accru).

Il ne faudra pas oublier que les résultats ont été obtenus en faisant abstraction du bruit et de l'actionneur. Le chapitre 5 nous a permis de voir qu'à la fois le bruit et l'actionneur utilisé contraindront peut-être l'automaticien à se rabattre sur des valeurs de gains beaucoup moins importantes que celles données par l'algorithme relatif au PID, ce qui entraînera l'obtention de moins bonnes performances que celles présentées dans ce paragraphe. Ceci sera bien sûr à considérer au cas par cas. Il se pourra même parfois que l'ajout du terme dérivé ne présente que peu ou pas du tout d'intérêt.

Revenons aux systèmes discutés dans cette section. L'amélioration des performances obtenues avec le PID pour le système $G_4(s)$ pourrait paraître étonnante. Ce système possède un intégrateur et donc la phase de $G_c(i\omega)G(i\omega)$ à la fréquence nulle sera de -180° . Le PID possédant deux zéros - au lieu d'un seul dans le cas du PI - il sera plus facile d'obtenir une grande marge de phase dans ce cas que dans le cas du PI (deux zéros contribuant à augmenter la phase en basse fréquence). De plus ces deux zéros contribueront également à repousser le 0 dB de l'amplitude de $G_c(i\omega)G(i\omega)$ beaucoup plus loin que si l'on avait utilisé une structure PI. Ce faisant, on ouvrira beaucoup plus la bande passante du système. La fonction de sensibilité verra son maximum rejeté beaucoup plus loin vers les hautes fréquences. Ceci explique donc les performances écrasantes obtenues pour le rejet de perturbations.

Le même genre de raisonnement explique l'amélioration du rejet de perturbations pour le système $G_{14}(s)$ lorsque l'on passe d'une structure PI à une structure PID.

6.4.2 Conclusions

Ce chapitre élabore un algorithme systématique sur base d'un modèle en vue de la détermination des paramètres K , K_i et K_d du PID.

Cet algorithme s'inspire d'un résultat récent développé par Åström ([9]). Nous avons montré au chapitre 4 que ce dernier manquait de systématisme pour la détermination du gain K_d .

Le chapitre 5 nous a permis de comprendre qu'il est nécessaire de tenir compte de phénomènes tels que la saturation des actionneurs et l'influence du bruit présent dans la boucle de régulation en vue d'un choix adéquat du K_d .

L'algorithme systématique élaboré dans ce chapitre s'appuie sur l'algorithme d'Åström (chapitre 4) en tenant compte des enseignements apportés au chapitre 5.

Cet algorithme systématique nous a servi pour réguler le Three-Tank (section 6.3). On a alors compris l'intérêt d'un algorithme comme celui développé dans ce chapitre qui optimise les paramètres mais en présence de contraintes de bruit et de saturation.

De plus, nous avons tiré parti du fait que nous avons à ce stade deux algorithmes systématiques, l'un pour le PI (chapitre 2) et l'autre pour le PID (chapitre 6) afin de comparer les résultats obtenus avec un régulateur PI et ceux obtenus avec un régulateur PID sur quelques systèmes (section 6.4).

La structure de régulation PID nous laisse entrevoir par rapport à la structure PI de meilleures performances et une robustesse accrues. Ceci est une conclusion théorique où, contrairement au cas du Three-Tank, il n'a pu être tenu compte de phénomènes de bruit et de saturations éventuelles des actionneurs.

Chapitre 7.

“ Iterative Feedback Tuning ” : Méthode d'optimisation expérimentale

Jusqu'à présent, nos algorithmes d'optimisation reposaient sur la connaissance du modèle d'un système. Nous nous sommes d'abord intéressés à la modélisation du système avant de procéder à sa synthèse. Un grand nombre de méthodes de réglage découpent les phases d'identification et de synthèse du régulateur.

La dernière partie de ce travail de fin d'études a pour objets l'étude d'une méthode d'optimisation où les phases d'identification et de synthèse sont couplées et la validation expérimentale de celle-ci.

Nous nous restreindrons à un nouveau schéma itératif – l'Iterative Feedback Tuning – développé par H. Hjalmarsson, S. Gunnarson et M. Gevers [14] que nous appliquerons dans le cadre du régulateur PID introduit au chapitre 4.

Il s'agit d'une méthode optimale basée sur la minimisation d'un critère de type quadratique dans lequel apparaît explicitement l'erreur entre la sortie boucle fermée obtenue expérimentalement et la réponse désirée. Un second terme peut pénaliser l'effort de commande.

Il n'est donc plus question d'une étape de modélisation. L'idée présente dans cette méthode est de remplacer cette étape par une modélisation directe des données recueillies en boucle fermée. Cela débouche sur un schéma itératif d'expériences menées en boucle fermée et de mise à jour des paramètres du régulateur.

Ce chapitre développe la théorie de l'IFT jusqu'à l'obtention de l'algorithme.

Nous nous pencherons dans le chapitre suivant sur les problèmes d'implémentation et sur les résultats obtenus au moyen de cette méthode.

7.1 Critère de synthèse

Considérons le système de commande représenté à la figure 7.1. Nous ne disposons d'aucune information sur le procédé $G(q)$. Les expressions mathématiques du système commandé au moyen d'un contrôleur à deux degrés de liberté $C = \{C_r, C_y\}$ sont :

$$\begin{aligned}y(t) &= G(q)u(t) + v(t) \\ u(t) &= C_r(q, \rho)r(t) - C_y(q, \rho)y(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

Dans ces expressions, ρ représente le vecteur des paramètres du contrôleur, q est l'opérateur de délai, $G(q)$ est la fonction de transfert inconnue et temps-discret du système, t représente les instants temps-discret et $u(t)$, $r(t)$, $y(t)$ et $v(t)$ sont respectivement la séquence de commande, la séquence de consigne, la séquence de sortie et une séquence de bruit additif.

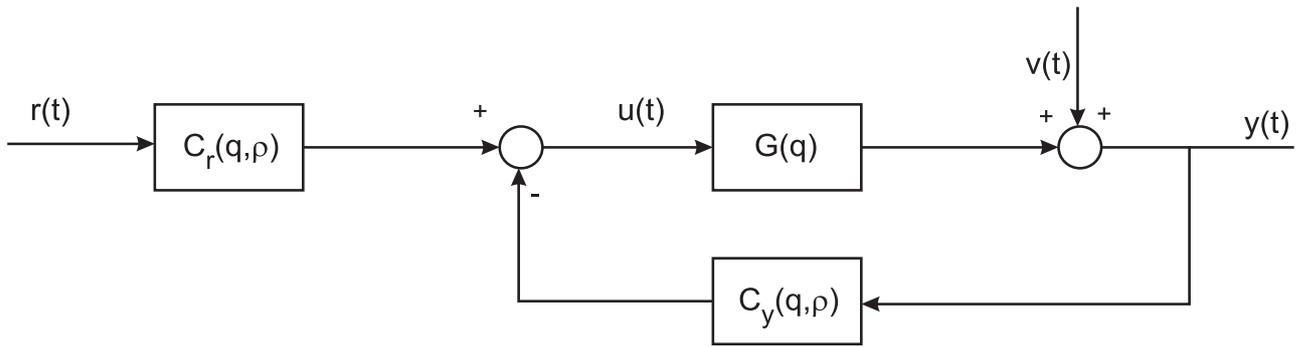


Figure 7.1 : Contrôleur à deux degrés de liberté.

On déduira également de ce même schéma la fonction de transfert en boucle fermée T_0 du système, ainsi que sa fonction de sensibilité S_0 :

$$T_0(\rho, q) = \frac{C_r(\rho, q)G(q)}{1 + C_y(\rho, q)G(q)}, \quad (7.2)$$

$$S_0(\rho, q) = \frac{1}{1 + C_y(\rho, q)G(q)}. \quad (7.3)$$

L'idée de Hjalmarsson et al. est de synthétiser ce contrôleur $C = \{C_r, C_y\}$ de telle manière que la sortie du système régulé soit la plus proche possible – au sens de l'erreur quadratique – de la réponse d'un modèle de référence T_d .

Cette réponse sera donnée par :

$$y_d(t) = T_d(q)r(t) \quad (7.4)$$

Nous allons calculer $\rho^* = \arg \min_{\rho} J(\rho)$, où le critère à minimiser peut s'écrire :

$$J(\rho) = \frac{1}{2N} E \left\{ \sum_{t=1}^N (L_y(q) \tilde{y}(\rho, t))^2 + \lambda \sum_{t=1}^N (L_u(q)u(\rho, t))^2 \right\} \quad (7.5)$$

expression dans laquelle $\tilde{y}(\rho, t) = y(\rho, t) - y_d(t)$.

Le premier terme pénalise donc la différence entre la sortie désirée y_d et la sortie réalisée $y(\rho, t)$, pondérée fréquemment par $L_y(q)$. Le second terme pénalise l'effort de commande, pondéré fréquemment par un filtre $L_u(q)$.

Au lieu d'introduire des facteurs de pondération fréquentielle, on pourra introduire à leur place des facteurs de pondération temporelle. Ceci sera discuté au chapitre 8.

Le critère (7.5) peut être réécrit¹ – en se servant de (7.2) et (7.3) – sous la forme suivante, en supposant l'indépendance statistique de la consigne r et du bruit v :

1. on omettra parfois dans la suite, les arguments q des fonctions de transfert afin de simplifier les écritures lorsque cela ne prête pas à confusion

$$\begin{aligned}
 J(\rho) = & \frac{1}{2N} E \left\{ \sum_{t=1}^N [L_y (T_d - T_0(\rho)) r(t)]^2 \right\} \\
 & + \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{t=1}^N [L_y S_0(\rho) \cdot v(t)]^2 \right\} \\
 & + \frac{\lambda}{2N} E \left\{ \sum_{t=1}^N [L_u u(t, \rho)]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nous voyons dès lors qu'en plus des pénalités sur l'erreur de poursuite et sur l'effort de commande, les perturbations interviennent dans la fonction de coût $J(\rho)$.

7.2 Minimisation du critère

Nous nous intéresserons maintenant à la minimisation de $J(\rho)$, c'est-à-dire à l'annulation de son gradient par rapport au vecteur ρ des paramètres du contrôleur. Afin de faciliter la notation, nous supposerons dans cette section que $L_y = L_u = 1$. Nous chercherons donc à résoudre l'équation :

$$0 = \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho) = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{t=1}^N \tilde{y}(\rho, t) \frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho}(\rho, t) + \lambda \sum_{t=1}^N u(\rho, t) \frac{\delta u}{\delta \rho}(\rho, t) \right\} \tag{7.7}$$

A cause de la complexité de l'expression de \tilde{y} en fonction de ρ et surtout de notre méconnaissance du système G ainsi que du spectre des perturbations v qui interviennent tous deux dans l'expression de \tilde{y} , une méthode itérative de minimisation s'impose. Nous allons donc effectuer une série d'étapes i , de pas γ_i pour atteindre un minimum local de la fonction de coût :

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i R_i^{-1} \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \tag{7.8}$$

R_i doit être une matrice définie positive. Il peut s'agir d'une matrice unité, mais la convergence sera plus rapide si R_i est une estimation de la matrice hessienne de $J(\rho)$ (voir [12]).

Ce problème, tel que posé à ce stade, ne sera soluble que si nous sommes en mesure de calculer $\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i)$. L'originalité de l'IFT est de montrer qu'il est possible de remplacer $\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i)$ par une approximation non-biaisée, basée sur les échantillons constants.

Pour ce faire, on a besoin de $\tilde{y}(\rho_i)$ et $u(\rho_i)$, ainsi que de leur gradient $\tilde{y}'(\rho_i)$ et $u'(\rho_i)$. Nous allons voir comment il est possible de calculer une telle estimation.

7.2.1 Signaux de sortie

L'expression de \tilde{y} est donnée par :

$$\tilde{y}(\rho) = \frac{C_r(\rho)G}{1 + C_y(\rho)G} r - T_d r + \frac{1}{1 + C_y(\rho)G} v \tag{7.9}$$

La dérivation de l'expression (7.9) par rapport aux paramètres ρ conduit immédiatement à :

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(\rho) &= \frac{G}{1 + C_y(\rho)G} C_r(\rho)r - \frac{C_r(\rho)G^2}{[1 + C_y(\rho)G]^2} C_y(\rho)r - \frac{G}{[1 + C_y(\rho)G]^2} C_y(\rho)v \quad (7.10) \\ &= \frac{1}{C_r(\rho)} C_r(\rho)T_0(\rho)r - \frac{1}{C_r(\rho)} C_y(\rho)[T_0^2(\rho)r + T_0(\rho)S_0(\rho)v]\end{aligned}$$

Dans cette expression, les quantités $C_r(\rho)$, $C_r'(\rho)$ et $C_y(\rho)$ sont des fonctions connues de ρ et dépendent donc des paramètres du régulateur, alors que $T_0(\rho)$ et $S_0(\rho)$ sont des fonctions inconnues de par leur dépendance du système G inconnu. En conséquence de quoi, la grandeur $\tilde{y}'(\rho)$ ne pourra être obtenue uniquement par l'expérimentation sur le système en boucle fermée. La seconde écriture de (7.10) nous montre que $\tilde{y}'(\rho)$ est la somme de trois termes.

Le premier résulte d'un simple filtrage du signal de référence r à travers la boucle fermée $T_0(\rho)$, alors que la somme du second et du troisième apparaît clairement comme résultant de deux filtrages successifs de la référence et du bruit à travers le système ; nous pouvons en effet réécrire cette somme comme résultant du filtrage de la sortie du système bouclé à travers ce même système :

$$T_0(\rho)y(\rho) = T_0^2(\rho)r + T_0(\rho)S_0(\rho)v \quad (7.11)$$

Les deux derniers termes de (7.10) sont obtenus en réutilisant le signal de sortie d'une expérience en boucle fermée comme signal de référence pour une nouvelle expérience.

Nous pouvons donc réécrire $\tilde{y}'(\rho)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(\rho) &= \frac{1}{C_r(\rho)} [C_r(\rho) \cdot T_0(\rho) \cdot r - C_y(\rho) \cdot T_0(\rho) \cdot y] \\ &= \frac{1}{C_r(\rho)} [(C_r(\rho) - C_y(\rho)) T_0 \cdot r + C_y(\rho) \cdot T_0(\rho)(r - y)]\end{aligned} \quad (7.12)$$

La deuxième expression de (7.12) – obtenue par un simple artifice de calcul – nous montre que deux expériences suffisent pour calculer $\tilde{y}'(\rho)$. En réalité, une troisième expérience s'impose.

Notons les signaux de sortie de ces trois expériences pour y_i^j , $j = 1, 2, 3$. Les signaux de consigne correspondants sont :

$$\begin{aligned}r_i^1 &= r \\ r_i^2 &= r - y_i^1 \\ r_i^3 &= r\end{aligned} \quad (7.13)$$

Après passage de ces derniers à travers la boucle fermée, nous obtenons les expressions suivantes pour les y_i^j :

$$\begin{aligned}y_i^1 &= T_0(\rho_i)r + S_0(\rho_i)v_i^1 \\ y_i^2 &= T_0(\rho_i) (r - y_i^1(\rho_i)) + S_0(\rho_i)v_i^2 \\ y_i^3 &= T_0(\rho_i)r + S_0(\rho_i)v_i^3\end{aligned} \quad (7.14)$$

où v_i^j désigne les perturbations en sortie à l'itération i et à l'expérience j ; elles sont mutuellement indépendantes puisqu'elles proviennent d'expériences différentes.

A chaque itération, nous nous servons des trois signaux de sortie obtenus pour calculer $\tilde{y}(\rho_i)$ et $\text{est}[\tilde{y}'(\rho_i)]$:

$$\tilde{y}_i = y_i^1 - y_d$$

$$\text{est}[\tilde{y}'(\rho_i)] = \frac{1}{C_r(\rho_i)} [(C_r(\rho_i) - C_y(\rho_i)) y^3(\rho_i) + C_y(\rho_i) y^2(\rho_i)] \quad (7.15)$$

La première expression de (7.15) est une réalisation exacte de $\tilde{y}(\rho_i)$; en effet, la perturbation générée lors de la première expérience intervient dans le critère $J(\rho)$ (voir expression (7.9)).

La deuxième expression de (7.15) est bien quant à elle une estimée car $\text{est}[\tilde{y}'(\rho_i)]$ est une version de $\tilde{y}'(\rho_i)$ perturbée par les réalisations de bruit v_i^2 et v_i^3 . En effet, si nous développons cette expression en détail nous obtenons que :

$$\text{est}[\tilde{y}'(\rho_i)] = \tilde{y}'(\rho_i) + \frac{S_0(\rho_i)}{C_r(\rho_i)} [(C_r(\rho_i) - C_y(\rho_i))v_i^3 + C_y(\rho_i)v_i^2] \quad (7.16)$$

Nous voyons donc que le seul désagrément de la méthode intervient à ce niveau-ci de par l'intervention des perturbations lors des deuxièmes et troisièmes expériences.

On pourrait s'interroger quant à l'utilité de la troisième expérience : pourquoi n'utilise-t-on pas simplement y_i^1 dans la seconde expression de (7.15) au lieu de y_i^3 ? La réponse à cette question se trouve dans une remarque déjà formulée plus haut, relative à l'indépendance statistique du bruit de sortie d'expériences différentes. Utiliser y_i^1 plutôt que y_i^3 dans (7.15) aurait conduit à faire apparaître explicitement v_i^1 à la place de v_i^3 dans (7.16).

L'estimation du gradient de $J(\rho)$ aurait été biaisée, vu l'apparition d'un terme en $E[(v_i^1)^2]$.

7.2.2 Signaux d'entrée

Cette section vise à obtenir les signaux $u(\rho)$ et $u'(\rho)$ intervenant dans le calcul de gradient de $J(\rho)$. En notant u_i^1 , u_i^2 et u_i^3 les signaux de commande respectivement relatifs aux expériences 1, 2 et 3, on montre que $u(\rho_i)$ et $\text{est}[u'(\rho_i)]$ sont donnés par :

$$u(\rho_i) = u_i^1$$

$$\text{est}[u'(\rho_i)] = \frac{1}{C_r(\rho_i)} [(C_r(\rho_i) - C_y(\rho_i)) u^3(\rho_i) + C_y(\rho_i) u^2(\rho_i)] \quad (7.17)$$

Le lecteur intéressé s'en référera à [14]. Des remarques analogues formulées à la section précédente sont d'application ici.

7.2.3 Estimation du gradient

Avec les signaux définis dans les deux sections précédentes, une estimation du gradient de $J(\rho_i)$ peut être obtenue en prenant :

$$\text{est}\left[\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i)\right] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \tilde{y}(\rho_i, t) \text{ est}\left[\frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho}(\rho_i, t)\right] + \lambda u(\rho_i, t) \text{ est}\left[\frac{\delta u}{\delta \rho}(\rho_i)\right] \right\} \quad (7.18)$$

Nous avons bien un estimateur non-biaisé du gradient du critère,

$$E\left\{ \text{est}\left[\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i)\right] \right\} = \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \quad (7.19)$$

ce qui est une condition indispensable au bon fonctionnement de la méthode d'approximation stochastique de l'algorithme.

Rappelons une dernière fois que c'est là toute la motivation pour la troisième expérience, qui permet d'éviter que l'erreur entre $\text{est}[\tilde{y}'(\rho_i)]$ et $\tilde{y}'(\rho_i)$ soit corrélée avec \tilde{y}_i (idem avec u).

7.2.4 Modification de la direction de recherche

Il y a plusieurs possibilités pour le choix de la modification de la direction de recherche R_i du minimum du critère lors de l'itération (7.8).

La matrice identité conduit simplement à suivre le gradient dans la direction négative.

Un meilleur choix consiste à prendre R_i égal au hessien de $J(\rho_i)$. Néanmoins, le calcul du hessien fera intervenir des dérivées d'ordre deux et il sera difficile de les obtenir par expérience. On pourra dès lors prendre une approximation au premier ordre du hessien qui ne fera intervenir que des dérivées de premier ordre :

$$J''(\rho) \cong \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho} \left(\frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho} \right)^T + \lambda \left(\frac{\delta u}{\delta \rho} \right) \left(\frac{\delta u}{\delta r} \right)^T \right\} \quad (7.20)$$

Il sera alors tentant de prendre R_i tel que :

$$R_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ \text{est} \left[\frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho}(\rho_i) \right] \cdot \left[\text{est} \left[\frac{\delta \tilde{y}}{\delta \rho}(\rho_i) \right] \right]^T + \lambda \text{est} \left[\frac{\delta u}{\delta \rho}(\rho_i) \right] \cdot \text{est} \left[\frac{\delta \tilde{u}}{\delta \rho}(\rho_i) \right]^T \right\} \quad (7.21)$$

Cette expression ne fait appel qu'aux signaux obtenus lors des différentes expériences décrites ci-dessus. Ce choix est en fait une approximation biaisée de la direction de Gauss-Newton (voir [19]).

7.3 Résumé de l'algorithme

<p>Soit l'étape i de l'algorithme.</p> <p>Le vecteur des paramètres du régulateur à cette étape est ρ_i.</p> <p>(1) On génère les signaux y_i^1, y_i^2 et y_i^3 et les signaux u_i^1, u_i^2 et u_i^3 relatifs aux signaux d'entrée donnés en (7.13).</p> <p>(2) On calculera alors $\tilde{y}_i, \text{est}[\tilde{y}'_i], u_i$ et $\text{est}[u'_i]$ via les relations (7.15) et (7.17). On obtiendra ensuite l'approximation stochastique du gradient $\text{est} \left[\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \right]$ via la relation (7.18).</p> <p>(3) Les nouveaux paramètres du contrôleur sont calculés par :</p> $\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i R_i^{-1} \text{est} \left[\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \right]$ <p style="text-align: center;">où γ_i est le pas à l'étape i et R_i est donné par la relation (7.21)</p> <p>(4) On passe à l'étape $i + 1$.</p>
--

Nous venons donc de présenter l'algorithme de l'IFT sous sa forme théorique. Il importera alors à ce stade de s'occuper de son implémentation. Ceci est fait au chapitre suivant.

Chapitre 8.

Réglage d'un PID par "Iterative Feedback Tuning"

8.1 Objectifs de la régulation

La théorie de l'IFT présentée au chapitre précédent ne permet de régler que le suivi de consigne. Or, un objectif industriel de première importance concerne le rejet de perturbations de charge, ce dont l'IFT ne tient pas compte directement.

C'est pourquoi nous proposerons dans ce chapitre un nouveau modèle IFT remédiant à cette carence. Néanmoins, nous appliquerons dans un premier temps la méthode de base afin de régler le suivi de consigne. Dans un second temps, nous proposerons une méthode tenant compte conjointement des problèmes de rejet de perturbations et de suivi de consigne.

Ces différentes méthodes seront appliquées au Three-Tank régulé à l'aide d'un PID à deux degrés de liberté.

8.2 Régulation de suivi de consigne

8.2.1 Implémentation de l'IFT

L'algorithme de l'IFT présenté précédemment résume la méthode comme on peut la trouver dans la littérature. L'implémentation exigera cependant de nous soucier d'abord de problèmes comme par exemple le choix du γ_i . Nous nous attacherons donc dans cette section à des problèmes liés à l'implémentation de la méthode ainsi qu'à certains degrés de liberté introduits dans celle-ci.

8.2.1.1 Modèle de référence

Il importe de donner une expression à T_d . Ce modèle discret T_d n'a pas besoin d'être en rapport avec la boucle de régulation réelle. On pourra alors facilement obtenir en fonction de certaines spécifications sur le suivi de consigne un modèle discret T_d générant une réponse satisfaisant ces spécifications. Par exemple, si l'on désire obtenir un temps de réponse inférieur à 200 sec ainsi qu'un overshoot inférieur à 6 %, un modèle répondant à ces deux spécifications sera le suivant :

$$T_d(q) = \frac{(0,0025q + 0,0024)}{(q^2 - 1,89q + 0,94)}$$

La réponse de suivi de consigne obtenue sera alors donnée à la figure 8.1. Ce modèle sera conservé dans la suite de nos expériences.

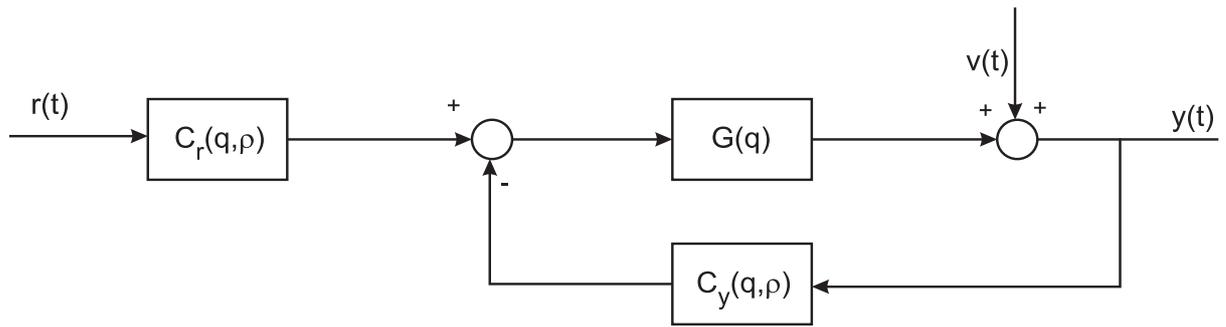


Figure 8.2 : Boucle de régulation.

Le calcul de $\tilde{y}'(\rho_i)$ et de $u'(\rho_i)$ requiert le filtrage par l'inverse de C_r . Si C_r n'est pas un filtre à minimum de phase, c'est-à-dire si ses zéros ne sont pas tous strictement à l'intérieur du cercle unité, le filtrage conduit à une instabilité. Un problème similaire apparaît quand le gradient de C_r et/ou C_y est instable.

Dans le cas présent, C_r est bien un filtre à minimum de phase mais les gradients de C_r et C_y par rapport à K_i seront instables.

On pourra remédier à ce défaut en procédant à une modification de la boucle de la figure 8.2. Il suffit de faire sortir l'intégrateur à la fois de C_r et de C_y .

En effet, partant de la structure initiale,

$$\begin{cases} u_1 = \left[Kb + \frac{K_i T}{(1 - q^{-1})} \right] r \\ u_2 = \left[K + \frac{K_i T}{(1 - q^{-1})} + \frac{K_d}{T} (1 - q^{-1}) \right] y \end{cases}$$

nous obtiendrons alors

$$\begin{cases} (1 - q^{-1})u_1 = [Kb(1 - q^{-1}) + K_i T] r \\ (1 - q^{-1})u_2 = \left[K(1 - q^{-1}) + K_i T + \frac{K_d}{T} (1 - q^{-1})^2 \right] y \end{cases}$$

En posant $\Delta=(1-q^{-1})$, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = [Kb(1 - q^{-1}) + K_i T] r \\ \Delta u_2 = \left[K(1 - q^{-1}) + K_i T + \frac{K_d}{T} (1 - q^{-1})^2 \right] y \end{cases}$$

Ces dernières expressions nous suggèrent alors la structure de régulation décrite à la figure 8.3

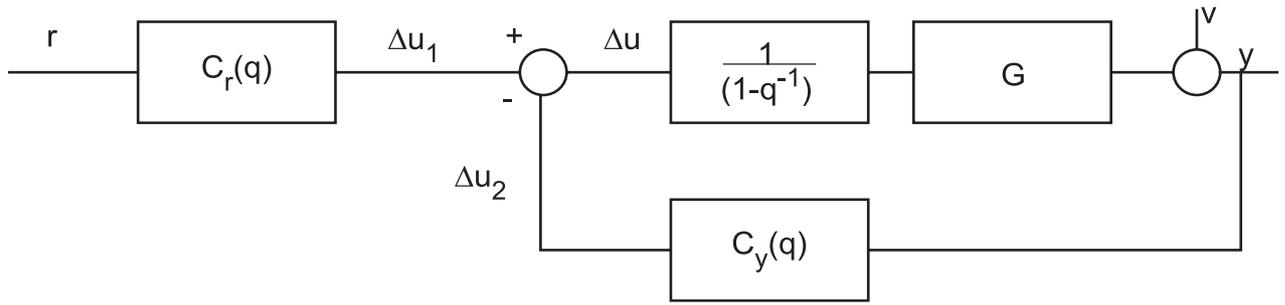


Figure 8.3 : Boucle de régulation modifiée.

et nous aurons comme nouvelles expressions de C_r et C_y :

$$\begin{aligned}
 C_r(q) &= [K b(1 - q^{-1}) + Ki T] \\
 C_y(q) &= \left[K(1 - q^{-1}) + Ki T + \frac{Kd}{T} (1 - q^{-1})^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

Il est particulièrement intéressant de remarquer que ce remaniement des expressions de C_r et C_y (relation (8.2)) n'entraînera aucune modification des expressions de est $[\tilde{y}'(\rho_i)]$ et est $[u'(\rho_i)]$. Nous trouverons alors les expressions de $C'_r(\rho)$ et $C'_y(\rho)$. Celles-ci se trouvent dans le tableau 8.1. Les gradients de C_r et C_y sont à présent stables.

$\frac{\delta.}{\delta\rho}$	C_r	C_y
$\frac{\delta.}{\delta b}$	$K(1-q^{-1})$	O
$\frac{\delta.}{\delta K}$	$b(1-q^{-1})$	$(1-q^{-1})$
$\frac{\delta.}{\delta Ki}$	T	T
$\frac{\delta.}{\delta Kd}$	0	$\frac{1}{T} (1 - q^{-1})^2$

Tableau 8.1 : Gradients de C_r et C_y

Disposant à ce stade de $C'_r(q)$ et $C'_y(q)$, il sera possible de calculer est $[\tilde{y}'(\rho_i)]$. Nous transformerons les expressions en q en équations aux différences auxquelles nous imposerons les conditions initiales nulles. On procédera de même jusqu'à l'obtention du gradient estimé.

8.2.1.3 Choix du pas γ_i

Un problème de taille réside dans le choix du pas à appliquer lors de chaque itération. En effet, un pas trop grand pourrait conduire à un régulateur déstabilisant la boucle.

La solution que nous proposons est de calculer à l'étape i l'estimée du coût de l'étape $i + 1$ en fonction d'une série de $\gamma_i \in [0;1]$ et ce sur base de signaux disponibles à l'étape i . Nous choisirons alors le γ_i qui minimise le coût estimé pour l'étape $i + 1$.

En effet, une approximation de Taylor à l'ordre deux de $J(\rho)$ sera donnée par :

$$J(\rho_{i+1}) = J(\rho_i) + J'(\rho_i) (\rho_{i+1} - \rho_i) + \frac{1}{2}(\rho_{i+1} - \rho_i)^T J''(\rho_i) (\rho_{i+1} - \rho_i) \quad (8.3)$$

Or, ρ_{i+1} sera calculé par:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i R_i^{-1} \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \quad (8.4)$$

Nous obtiendrons donc en nous servant des deux dernières expressions que

$$J(\rho_{i+1}) = J(\rho_i) - \gamma_i \left(\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \right)^T R_i^{-1} \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) + \gamma_i^2 \left(\frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \right)^T (R_i^{-1})^T \frac{\delta J}{\delta \rho}(\rho_i) \quad (8.5)$$

Remarquons encore que nous limiter à une approximation de Taylor à l'ordre 1 n'aurait pas permis de déterminer le γ_i en raison du fait que $J(\rho_{i+1})$ en fonction de γ_i est simplement une droite. L'approximation à l'ordre 2 apportera quant à elle une concavité de type parabolique.

Dans l'expression (8.5) toutes les grandeurs peuvent être obtenues après avoir accompli les expériences de l'étape i .

Cependant, le lecteur féru d'optimisation mathématique s'interrogera sans doute sur l'utilité de cette méthode : on peut démontrer que vu que $J(\rho)$ est une fonction quadratique, un minimum local de cette fonction peut être directement obtenu en prenant γ_i égal à un dans (8.4).

Ceci est cependant un résultat théorique ; nous ne disposons par exemple pas du hessien théorique mais seulement d'une approximation dans la méthode de l'IFT.

Le choix du pas semble donc être nécessaire. Remarquons à cet égard que certains articles relatifs à l'IFT choisissent des pas pas nécessairement proches de l'unité [18].

La figure 8.4 (a) montre une fonction de coût estimée en fonction de γ_i . Nous voyons que celle-ci est relativement bruitée, mais nous pouvons quand même entrevoir une allure moyenne parabolique.

On peut également se rendre compte que certains pics de bruit pourraient fausser notre choix du γ_i . Il serait donc intéressant d'amoinrir ces pics. Une interpolation de cette courbe ne nous semble pas appropriée : rien ne nous assure que les échantillons prélevés sur cette courbe en vue d'une interpolation ne soient pas fort bruités, auquel cas, ceux-ci fausseraient totalement l'interpolation.

Nous avons opté pour un filtrage de type " moving average " (filtrage de Golay). Celui-ci consiste à prendre une moyenne pondérée de points aux alentours de l'échantillon courant. Le résultat obtenu avec un tel filtrage est montré à la figure 8.4 (b). Nous avons amenuisé de beaucoup certains pics de bruit.

N° itération	b	K	Ki	Kd	J_actuel (mesuré)	J_prochain (prédit)
1	0, 31	5, 34	0, 024	100, 00	0, 0269	0, 0229
2	0, 55	6, 71	0, 016	95, 00	0, 0222	0, 0157
3	0, 62	6, 62	0, 017	94, 50	0, 0085	0, 0073
4	0, 60	7, 13	0, 012	90, 62	0, 0055	0, 0031
5	0, 49	6, 88	0, 015	87, 50	0, 0075	0, 0050

Tableau 8.2 : Evolution des gains du PID et des coûts mesurés et prédits en fonction des pas d'itération.

Au vu de ces résultats, plusieurs remarques s'imposent :

- (1) On peut estimer que l'on arrive à une réponse optimale en 4 pas (cf J_actuel (mesuré) dans le tableau 8.2). On constate pour cette réponse que l'on suit bien le transitoire du modèle de référence mais que l'on n'améliore pas du tout l'amortissement par rapport à la réponse initiale (pas n°1).

On peut donc conclure que l'IFT classique met trop d'emphase sur le suivi du transitoire et pas assez sur le taux d'ondulation. Nous tenterons de remédier à cette cause à la section suivante.

- (2) En comparant les grandeurs J_actuel (mesuré) et J_prochain (estimé) correspondantes (tableau 8.2), on constate que certaines valeurs correspondantes sont très différentes. Notre méthode de choix de γ_i ne s'avère donc pas la meilleure.

Néanmoins, nous la conserverons par la suite et nous nous fierons plus aux coûts mesurés qu'aux coûts prédits.

8.2.3 Expérience IFT n°2

8.2.3.1 Variante de la méthode de base

Nous essayerons de remédier aux larges dépassements apparus dans l'expérience IFT n°1. On se basera sur une technique expliquée dans [15] et [16]. Celle-ci consiste à introduire des poids temporels dans l'expression de la fonction de coût. La fonction de coût choisie dans l'expérience IFT n°1 se réécrit alors

$$J(\rho) = \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N \omega_y(t) (\tilde{y}(t))^2$$

où $\omega_y(t)$ est un poids temporel

Nous utiliserons ces poids temporels de manière à masquer la réponse transitoire du suivi de consigne. Ce poids sera défini de la manière suivante.

$$\omega_y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_0 < t \leq N \\ 0 & \text{si } 0 < t \leq t_0 \end{cases}$$

Cela équivaut à placer un masque sur la réponse transitoire de sortie.

n° itération	b	K	Ki	Kd	J_actuel (mesuré)	J_prochain (prédit)
1	0,31	5,34	0,024	100,00	0,0269	0,0245
2	0,30	5,84	0,020	98,00	0,0253	0,0272
3	0,5	5,77	0,0168	97,50	0,0132	0,0117
4	0,66	6,02	0,0158	96,50	0,0106	0,0093
5	0,62	6,80	0,0179	95,25	0,0092	0,0083
6	0,65	8,05	0,0128	91,25	0,0098	-----

Tableau 8.3 : Evolution des paramètres et des coûts mesurés et prédits pour l'expérience IFT n°2.

Au vu de ces résultats, nous formulerons les remarques suivantes:

- (1) La diminution du dépassement est flagrante lors du passage du pas n°1 au pas n°2. En réduisant encore la taille du masque, on diminuera progressivement le temps de réponse en augmentant alors le dépassement. Tout cela est donc conforme à nos attentes.
- (2) La réponse obtenue au pas n°5 semble être optimale au vu du tableau 8.3. En effet, un sixième pas conduirait à un coût supérieur (cf J_actuel (mesuré)). De plus, les paramètres livrés par l'algorithme lors du cinquième pas d'itération conduisent à un suivi de consigne caractérisé par un temps de réponse de 240 sec et un pourcentage de dépassement de 8%. Ce résultat est à comparer avec la réponse de suivi de consigne obtenue dans l'expérience IFT n°1 (temps de réponse de 180 sec et pourcentage de dépassement de 16%). Cette comparaison met en exergue une fois de plus l'intérêt de la variante de l'IFT utilisée ici afin d'obtenir de bonnes réponses de suivi de consigne.

Nous avons donc pallié le désagrément produit par l'IFT classique. Cette variante a donc porté ses fruits.

8.3 Régulation du rejet de perturbations et du suivi de consigne

Le but poursuivi dans cette section est d'élaborer une méthode permettant de régler à la fois le suivi de consigne et le rejet de perturbations.

Nous procéderons d'abord à un remaniement de l'IFT afin de tenir compte de perturbations déterministes avant de chercher à concilier les deux problèmes précités.

8.3.1 Modèle IFT pour une perturbation déterministe

Considérons cette fois le système de commande représenté à la figure 8.7 dans lequel apparaît une perturbation déterministe (entrée l).

Nous nous limiterons dans cet exposé aux étapes principales afin de déduire les expériences à réaliser, vu la similarité avec la démarche développée au chapitre 7.

Le signal de sortie aura comme expression:

$$y = \frac{C_r G}{1 + C_y G} r + \frac{G}{1 + C_y G} l + \frac{1}{1 + C_y G} v \quad (8.6)$$

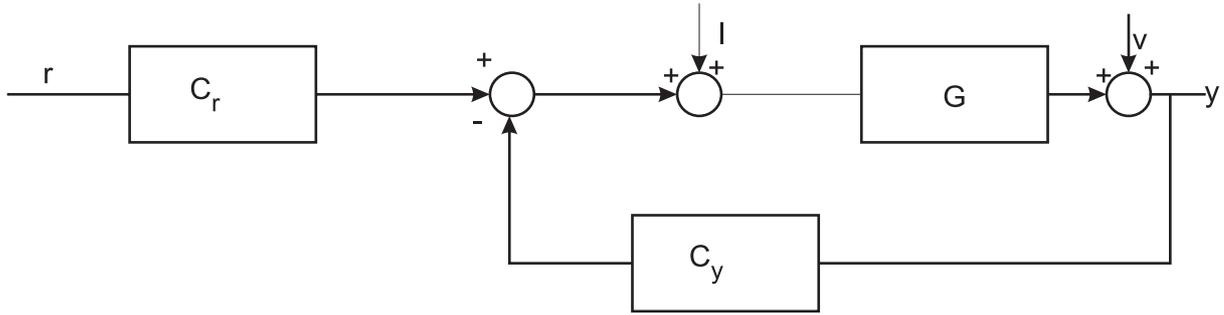


Figure 8.7 : Boucle de régulation.

Nous définirons les fonctions de transfert T_0 , R_0 et S_0 en vue de simplifier au mieux les développements ultérieurs :

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{C_r G}{1 + C_y G} \\ S_0 &= \frac{1}{1 + C_y G} \\ R_0 &= \frac{G}{1 + C_y G} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Supposons que le système G soit linéaire; dans ce cas, la relation (8.6) reste valable pour décrire le comportement du système autour d'un point d'équilibre.

Nous considérons alors que le système est stabilisé autour d'un de ses points d'équilibre ($r = 0$). Nous appelons y la réponse à une perturbation déterministe l .

Le signal d'erreur entre la sortie désirée et la sortie réelle est noté

$$\tilde{y} = y - y_d$$

La méthode exigera alors de pouvoir obtenir \tilde{y}' . On obtiendra après calcul:

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= \frac{-G^2}{(1 + C_y G)^2} C_y l - \frac{G}{(1 + C_y G)^2} C_y v \\ &= -\frac{1}{C_r} C_y (T_0 R_0 l + T_0 S_0 v) \\ &= \frac{1}{C_r} C_y (T_0 y) \end{aligned} \quad (8.8)$$

On pourra réécrire (8.8) - en se servant de (8.6) et (8.7) - de la façon suivante:

$$\tilde{y} = C_y (R_0 l) + C_y R_0 (l - y)$$

Nous obtenons le même genre d'expressions que celles déjà établies au chapitre 7.

Nous comprenons dès lors que, en vue d'obtenir une expression non-biaisée du gradient de la fonction de coût, nous devons encore une fois imposer trois expériences. Les signaux d'entrées seront les suivants:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Expérience 1:} & l_i^1 = l & r_i^1 = 0 \\
 \text{Expérience 2:} & l_i^2 = l & r_i^2 = \frac{-y_i^1}{C_r(\rho_i)} \\
 \text{Expérience 3:} & l_i^3 = l & r_i^3 = 0
 \end{array}$$

Après passage de ces derniers à travers la boucle fermée, nous obtenons les expressions suivantes pour les signaux de sortie (notés y_i^j):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Expérience 1:} & y_i^1 = R_0 l + S_0 v_i^1 \\
 \text{Expérience 2:} & y_i^2 = T_0 \left(\frac{-y_i^1}{C_r} \right) + R_0 l + S_0 v_i^2 \\
 \text{Expérience 3:} & y_i^3 = R_0 l + S_0 v_i^3
 \end{array}$$

De manière similaire au chapitre 7, nous nous servirons des signaux y_i^j en vue de l'obtention des grandeurs \tilde{y} et \tilde{y}' intervenant dans le calcul du gradient. Ces grandeurs seront obtenues ainsi:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_i &= y_i^1 - y_d \\
 \text{est}[\tilde{y}'_i] &= -C'_y(\rho_i) y_i^3 + C'_y y_i^2
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Nous sommes donc parvenus à proposer un nouveau schéma IFT tenant compte de la perturbation de charge dont nous pourrions par conséquent tirer parti.

8.3.2 Méthode proposée

Les algorithmes d'optimisation élaborés jusqu'ici tenaient compte à la fois du problème du rejet de perturbations et du problème de suivi de consigne. Il est dès lors tentant d'essayer de faire de même avec l'IFT.

Nous disposons à ce stade de deux algorithmes IFT capables de régler respectivement le rejet de perturbations et le suivi de consigne.

Dans les algorithmes d'optimisation ayant fait l'objet de la première partie du travail, deux phases distinctes étaient présentes:

- la première, à l'issue de laquelle le rejet de perturbations était définitivement fixé,
- la seconde, où le suivi de consigne était affiné via le réglage du paramètre b .

Dans le cadre de l'IFT, nous proposerons une méthode similaire procédant en deux phases également:

Outre les aspects relevant de l'implémentation de l'algorithme, notre démarche principale a été dans ce chapitre de modifier l'algorithme de base de l'IFT (chapitre 7) afin de répondre à des exigences similaires à celles décrites dans la première partie du travail.

Nous sommes parvenus à proposer une méthode IFT procédant en deux étapes et donc semblable aux méthodes d'optimisation ayant fait l'objet de la première partie du travail ; la première étape servant à régler le rejet de perturbations et la seconde, le suivi de consigne.

Cette méthode donne d'excellents résultats dans le cas du Three-Tank.

Cependant, nous avons insisté sur le fait que la méthode telle quelle souffre d'un défaut à savoir, elle ne tient pas directement compte des aspects relatifs à la robustesse.

Dans le cas du Three-Tank, nous avons fait confiance à notre intuition afin de ne pas trop dégrader la robustesse du système à la phase 1 de notre méthode.

On se rappellera également que la phase 2 permettra ici de combattre la dégradation de robustesse apparue à la phase 1.

De manière générale, nous avons émis une suggestion afin de tenir compte des aspects de robustesse dans la phase 1 de la méthode. Celle-ci consiste à introduire un poids fréquentiel dans l'expression de la fonction de coût. Il serait dès lors intéressant d'affiner et de tester cette dernière suggestion sur des systèmes plus complexes à réguler que le Three-Tank.

Ce travail ne serait pas complet si nous ne confrontions pas notre méthode d'optimisation avec d'une part, les méthodes d'optimisation nécessitant un modèle et d'autre part, les méthodes classiques de synthèse utilisées au chapitre 1.

Ces dernières sont plutôt qualitatives en ce qu'elles nous ont permis de juger les performances accessibles avec telle ou telle structure de régulation. Les performances obtenues avec ces méthodes sur le PI et le PID vont dans le même sens que celles obtenues à l'aide des algorithmes d'optimisation correspondants. On comprend également que la précision nécessaire pour tenter de concilier tous les objectifs de régulation est difficile à atteindre.

Les méthodes d'optimisation basées sur un modèle se sont révélées excellentes: accord parfait entre expériences et simulations. Faisant intervenir des paramètres de synthèse, elles sont de ce fait plus flexibles que les méthodes classiques. Elles permettent à l'automaticien d'incorporer dans l'algorithme la finalité de la régulation. Ces méthodes d'optimisation nécessitant la connaissance d'un modèle sont donc précises et relativement rapides dès que l'automaticien a intégré la manière d'agir sur les paramètres de synthèse. C'est pourquoi elles s'imposent lorsque l'on dispose d'un modèle précis du système à réguler.

Finalement, nous sommes parvenus à proposer dans l'Iterative Feedback Tuning une méthode réalisant les mêmes objectifs de régulation que ceux des méthodes basées sur un modèle. Tout comme dans ces méthodes, on a vu qu'il convenait dans l'Iterative Feedback Tuning de guider la méthode - par exemple, en opérant un choix de poids dans la fonction de coût -.

Le résultat s'est avéré excellent dans le cas du Three-Tank malgré une certaine lenteur de la méthode à cause du temps requis par expérience.

Elle s'indique particulièrement lorsque l'on dispose d'un modèle peu précis voire quand on ne dispose d'aucun modèle du système.

Chapitre 9.

Conclusions

Bibliographie

- [1] Digital Control Systems, B. Kuo, Saunders College Publishing, 1992.
- [2] Introduction à l'automatique, Volume 2, Systèmes discrets et échantillonnés, R. Hanus et P. Bogaerts, De Boeck, 2000.
- [3] Computer-Controlled Systems, Theory and Design, Third Edition, K.J. Åström and Björn Wittenmark, Prentice-Hall International, 1990.
- [4] Modern Control Systems, R. Dorf, R. Bishop, Addison-Wesley, 1998.
- [5] Linear Control Systems, C. Rohrs, J. Melsa, D. Schultz, McGraw-Hill, 1993.
- [6] PID Controllers: Theory, Design and Tuning, Second Edition, K.J Åström and T. Hägglund, Instrument Society of America, 1995.
- [7] Matlab 5.2 & 5.3, M. Mokhtari, Springer, 2000.
- [8] Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimization, K.J Åström, H. Panagopoulos and T. Hägglund, Automatica, Vol 34, No 5, pp 585-601, 1998.
- [9] Design of PID Controllers based on constrained optimization, K.J Åström, H. Panagopoulos and T. Hägglund, Proceeding of the American Control Conference, San Diego, California, June 1999.
- [10] PID Control, Design, Extension, Application. Hélène Panagopoulos, Ph. D. Thesis, Lund Institute of Technology, Department of Automatic Control, 2000.
- [11] Limitations on Control System Performance, K.J. Åström, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1999.
- [12] Convex Optimization and applications to Engineering, Stephen Boyd, Stanford University, 2000.
- [13] Analyse Numérique, Première partie, F.X. LITT, notes de cours, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, 1997.
- [14] Iterative Feedback Tuning: Theory and Applications, H. Hjalmarsson, M. Gevers, S. Gunnarson and O. Lequin, IEEE Control Systems, pp 26-41, August 1998.
- [15] Optimizing the settling time with Iterative Feedback Tuning, O. Lequin, M. Gevers and L. Triest, 14th Triennial World Congress, Beijing, P.R. China, 1999.
- [16] Optimal closed-loop PID Tuning in the process industry with the "Iterative Feedback Tuning" scheme, O. Lequin, Solvay S.A, Jemeppe-sur-Sambre, Belgium.

- [17] Iterative Feedback Tuning of a Nonlinear Controller for an inverted pendulum with a flexible transmission., B. Codrons, F. Debruyne, M. Dewan and M. Gevers, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications, pp 1281-1285, Trieste, Italy.
- [18] Iterative Feedback Tuning applied to Smith predictor controllers, F. Debruyne, Siemens, Service EIT ES (Advanced Process Control group), Huizingen, Belgium, December 2000
- [19] Synthèse itérative de contrôleurs sans identification : étude et validation expérimentale, B. Codrons, Master's Thesis, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, Louvain-la-Neuve, Belgium, June 1995, 137 pages.

Annexes

Annexe A

Cette annexe est relative au chapitre 2.

A.1 Démonstration du théorème de la page 25

Rappel du théorème :

Soit ω_φ , la fréquence à laquelle le système a une phase φ .

Supposons alors que le gain statique du système soit positif et que

$$\begin{aligned} \frac{d \arg G(i\omega)}{d\omega} < 0, \\ \frac{d \log_{10}|G(i\omega)|}{d \log_{10}\omega} < 1. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Alors il existe une solution à l'équation (2.7) du chapitre 2 dans l'intervalle

$$\omega_{90} < \omega < \omega_+ = \omega_{180 - \arcsin\left(\frac{R}{C}\right)}$$

Démonstration :

- (1) Par hypothèse $G(0) > 0$.

On peut alors démontrer que le gain intégral K_i doit être positif pour que le système en boucle fermée soit stable.

On démontre cela via le critère de stabilité de Routh-Hurwitz.

Pour s'en convaincre, nous prendrons un système $G(s)$ défini par :

$$G(s) = \frac{G(0)}{as^2 + bs + 1}$$

Le tableau de Routh-Hurwitz sera :

a	$(1 + K_i G(0))$
b	$K_i G(0)$
A	0
A $K_i G(0)$	0

$$\text{où } A = \frac{b(1 + K_i G(0)) - aK_i G(0)}{a}$$

Le critère de stabilité imposera en outre que A et $A K_i G(0)$ soient positifs.

Lorsque $G(0) > 0$, K_i devra nécessairement être positif.

Un raisonnement analogue sur des systèmes d'ordres supérieurs nous amènera à une conclusion identique. De cela, ainsi que de la relation (2.7) du chapitre 2 découlera que :

$$R + C \sin \varphi < 0$$

- (2) On pourra transformer les relations (A.1) en expressions plus explicites :
 La première de ces relations signifie que la phase est monotonement décroissante, c'est-à-dire $\varphi' < 0$.
 La seconde relation se transformera de la manière suivante en invoquant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \frac{d \log_{10} r}{d \log_{10} \omega} &< 1 \\ \Leftrightarrow \left. \frac{d \log_{10} r}{dr} \right]_r \cdot \frac{dr(\omega)}{d \log_{10}(\omega)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \left. \frac{d \log_{10} r}{dr} \right]_r \cdot \frac{dr(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d \log_{10}(\omega)}{d\omega} \right)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\omega \ln(10)r'}{\ln(10)r} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{r'}{r} &< \left(\frac{1}{\omega} \right) \end{aligned}$$

- (3) En reprenant l'équation (2.6), on peut évaluer $h(\omega)$ en ω_{90} . En effet, au vu des résultats précédents (1) et (2), on a

$$h(\omega_{90}) > 0.$$

De même, évaluons le signe de $h(\omega_+)$

En remarquant que $R > C$ et que

$$\begin{aligned} &\cos\left(180 - \arcsin\left(\frac{R}{C}\right)\right) \\ &= -\cos\left(\arcsin\left(\frac{R}{C}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{R^2}{C^2} - 1} \end{aligned}$$

on aura forcément que

$$h(\omega_+) < 0.$$

Or $h(\omega)$ est une fonction continue (théorème de composition de fonctions continues) et devra donc posséder au moins un zéro dans l'intervalle $[\omega_{90}; \omega_+]$.

A.2 Définition du temps de réponse

Soit t^* , le temps de réponse d'un système causal défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ (ou de manière équivalente par sa fonction de transfert $H(s)$). Notons $y(t)$ la réponse indicielle de ce système.

Nous prendrons alors comme définition du temps de réponse:

$$\int_0^{\infty} (y(\tau) - y(\infty)) d\tau = t^* y(\infty) \quad (\text{A.2})$$

Dans ce cas, il est possible de relier le temps de réponse t^* à une expression ne nécessitant que la connaissance de $H(s)$. En effet:

- (1) Le système étant causal, la réponse indicielle pourra être exprimée par:

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} h(t) dt$$

- (2) Considérons le membre de droite de (A.2).
On peut le réécrire en se servant de (1):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (y(\tau) - y(\infty)) d\tau &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\tau} h(\sigma) d\sigma - \int_0^{\infty} h(\sigma) d\sigma \right) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \left(-\int_{\tau}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned}$$

En se servant de l'intégration par partie, cette dernière expression se transformera en:

$$-\int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \right) d\tau = \underbrace{\left[-\tau \int_{\tau}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \right]_0^{+\infty}}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^{\infty} \tau h(\tau) d\tau}_{\text{II}} \quad (\text{A.3})$$

- (3) On transforme le premier terme de la dernière expression ainsi:

$$I = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{\tau}^{\infty} h(\sigma) d\sigma + \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \int_{\tau}^{\infty} h(\sigma) d\sigma$$

Dans cette dernière expression, il est manifeste que le second terme est nul. Le premier terme se calculera aisément à l'aide du théorème de l'Hospital et il s'avère qu'il sera nul également.

- (4) Pour le calcul du second terme de (B.3), on remarquera d'abord que

$$H'(s) = \int_0^{\infty} \tau h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

où le prime signifie l'opération de dérivation par rapport à s , et le second terme s'écrira alors

$$\text{II} = H'(0)$$

- (5) Il ne restera plus qu'à exprimer $y(\infty)$ en fonction de $H(s)$.

Or,

$$y(\infty) = \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

et

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

d'où

$$y(\infty) = H(0).$$

Tout calcul fait, on aura que

$$t^* = -\frac{H'(0)}{H(0)}$$

La définition (A.2) du temps de réponse a donc comme intérêt de relier directement celui-ci à une expression ne nécessitant que la connaissance de $H(s)$.

De manière tout aussi simple, si nous désirons connaître le temps de réponse t^* d'un système formé par la cascade de deux systèmes $H_1(s)$ et $H_2(s)$, chacun de ces deux systèmes étant caractérisé respectivement par des temps de réponses t_1^* et t_2^* (définis selon (A.2)), on peut montrer que l'expression du temps de réponse t^* sera donné par

$$t^* = t_1^* + t_2^*$$