Document mis à jour le 10 septembre 2009
Infos: `gdrion@ulg.ac.be`

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
INSTITUT MONTEFIORE

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES

Prof. R. Sepulchre - Prof. E. Bullinger

Exercices supplémentaires : Systèmes d'état : Commandabilité et Observabilité

Année académique 2009-2010

1 Le satellite

On considère les équations linéarisées d'un satellite au voisinage d'une orbite circulaire parcourue à vitesse ω constante :

$$\ddot{r} = 3\omega^2 r + 2\omega\dot{\theta} + u_r \qquad (1)$$

$$\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r} + u_\theta \qquad (2)$$

Le satellite est commandé par deux moteurs. Le premier fournit une force radiale u_r et le second une force tangentielle u_θ. La sortie mesurée y est la position radiale r.

On demande :

1. Suite à un problème technique, vous devez couper un des deux moteurs. Lequel choisiriez-vous ?
2. De montrez que si l'autre choix est fait, il existe une quantité conservée (intégrale première). Déduisez-en l'équation du mode non-commandable.
3. De déterminer si ce système est observable lorsque la sortie mesurée est la position radiale r, si possible sans calculer le rang d'une matrice. Si non, quelle sortie utiliser ?
4. De déterminer les conditions initiales qui ne peuvent être distinguées les unes des autres lorsque seuls $y(t)$ et $u(t)$ sont connus.

Solution

1. Nous pouvons écrire le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 && (3)\\
\dot{x}_2 &= x_4 && (4)\\
\dot{x}_3 &= 3\omega^2 x_1 + 2\omega x_4 + u_r && (5)\\
\dot{x}_4 &= -2\omega x_3 + u_\theta && (6)\\
y &= x_1 && (7)
\end{aligned}$$

où $x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{r}$ et $x_4 = \dot{\theta}$.
Les matrices d'état de ce système s'écrivent donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$B_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$C = (1\ 0\ 0\ 0) \tag{11}$$

$$D = 0 \tag{12}$$

Si on choisi de conserver le moteur tangentiel, la matrice de commandabilité s'écrit :

$$(B_\theta\ AB_\theta\ A^2B_\theta\ A^3B_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Elle est de rang plein (rang 4), le système est donc commandable. Par contre, si on conserve plutôt le moteur radial, la matrice de commandabilité s'écrit :

$$(B_r\ AB_r\ A^2B_r\ A^3B_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Elle n'est pas de rang plein (rang 3) : la deuxième et la quatrième colonne sont linéairement dépendantes. Le système possède donc dans ce cas un mode non-commandable. L'automaticien averti choisira donc de sacrifier le moteur radial.

2. Dans le cas $u_\theta = 0$, l'équation (6) peut se récrire $\dot{x}_4 = -2\omega\dot{x}_1$ et donc $x_4 + 2\omega x_1 = \mathrm{C^{te}}$. Ce système possède donc un mode non commandable : $z(t) = x_4(t) + 2\omega x_1(t)$ avec $\dot{z}(t) = 0$.
3. La variable d'état x_2 n'est pas observable car elle n'intervient pas dans l'équation de la sortie y, ni dans celles des dérivées des autres variables d'état. Son estimation nécessiterait l'intégration de y...

   Une sortie à utiliser pour rendre le système observable est la position angulaire θ.
4. Les conditions initiales qui ne peuvent être distinguées les unes des autres sont celles relatives au mode non-observable, donc sur la position angulaire. Autrement dit, la position angulaire d'un satellite ne peut pas être *observée* si on ne mesure que sa position radiale.

2 Construction d'un modèle d'état - Juin 2007

On demande :

1. De construire un modèle d'état *observable* mais *non-commandable* de fonction de transfert :
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$
2. De construire un observateur pour ce système en justifiant le choix des gains.
3. Sous quelle(s) condition(s) peut-on négliger la présence de modes observables mais non-commandables dans le design d'un système ?
4. De donner un exemple physique d'un système comportant un mode observable mais non-commandable.

Solution

1. Construction d'un modèle d'état *observable* mais *non-commandable*

On désire un modèle non-commandable. Partons donc de la forme canonique de commandabilité :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_{NC} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_C \\ x_{NC} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u$$

On désire que le modèle d'état soit observable. Une solution simple pour pouvoir observer les modes x_C et x_{NC} est de prendre [1]

$$y = x_C + x_{NC} \qquad \text{donc} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = 0$$

Calculons maintenant $H(s)$:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{B_1}{s - A_1} = \frac{1}{s+1}$$

1. une forme générale de C ($C = [C_1\, C_2]$) est également envisageable mais compliquerait les calculs, de même pour D

donc

$$A_1 = -1 \qquad B_1 = 1$$

Aucune information n'est donnée sur A_{12} et A_2. On aurait pu s'en douter vu que la fonction de transfert ne capture que le sous-espace commandable et observable du système. Le choix de ces valeurs est donc arbitraire. Pour simplifier, nous prenons

$$A_{12} = 0 \qquad A_2 = -a$$

Le mode non commandable est alors stable si $a > 0$ (cfr point 3).

Vérifions rapidement la non-commandabilité :

$$M_C = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad |M_C| = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{OK}$$

et l'observabilité :

$$M_O = [C \quad CA]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad |M_C| = -a + 1$$

Il faut donc choisir $a \neq 1$ pour que le système soit observable. En effet, si $a = 1$, les deux modes ont la même évolution et sont alors indifférentiables du point de vue de la sortie, et donc non observables.

2. Construction d'un observateur

Partons de l'équation de base pour un observateur $\hat{x}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\,(y - C\hat{x}) = \underbrace{(A - LC)}_{\hat{A}}\,\hat{x} + Bu + Ly$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 - l_1 & -l_1 \\ -l_2 & -a - l_2 \end{pmatrix}$$

La dynamique de l'observateur est donnée par les valeurs propres de la matrice $\hat{A}$. Le polynôme caractéristique est

$$\left| sI - \hat{A} \right| = s^2 + (a + l_2 + 1 + l_1)s - l_1 l_2$$

Nommons r_1 et r_2 les 2 racines de cette équation, qui sont en fait les valeurs propres de $\hat{A}$. Si l'on veut que l'observateur converge suffisamment vite, c'est-à-dire plus vite que les modes qu'il est censé observer, ces racines doivent être plus grandes que les fréquences propres des modes x_{OC} et x_{ONC}, à savoir 1 et a. On peut par exemple prendre l_1 et l_2 tels que

$$\min(r_1, r_2) > 5\ \max(1, a)$$

comme cela est fait dans l'exercice 1 de la répétition 3.

3. Conditions pour négliger le mode non-commandable

Ce mode ne dépend pas de l'entrée u. Par conséquent, son évolution dépend uniquement de son état initial. Si celui-ci est nul, il n'aura pas d'influence [2]. Si l'état initial est non-nul, on a les cas suivants :

- si le système est instable ($a < 0$), toute condition initiale non nulle ou la moindre perturbation sur x_{ONC} va s'amplifier et rendre le mode commandable indétectable en sortie
- si $a = 0$, le système est marginalement stable, et toute condition initiale non nulle persistera indéfiniment (en perturbant la sortie)
- si $a > 0$, le système est stable, et le mode non commandable va tendre vers zéro au cours d'un transitoire dont la durée dépend de la fréquence propre du mode, a

4. Exemple physique

Le premier exercice supplémentaire (le satellite) est un exemple de système non-commandable et observable, **à condition de spécifier les entrées et les sorties utilisées.**

Le satellite, où la seule entrée disponible est la poussée radiale u_r, et la sortie est la position angulaire θ est un exemple correct [3].

2. mais la moindre perturbation nous ramène au cas d'un état initial non-nul

3. sans spécifier les entrées, la réponse est incomplète, puisque si en entrée on choisit u_θ, le système est commandable