Chapitre 8

Diagrammes de Bode

8.1 Rappel théorique

Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle permet d'étudier la sortie d'un système LTI lorsque son entrée est un signal sinusoïdal de fréquence ω.

$$\begin{array}{ccccl} e^{\lambda t} & \rightarrow & \boxed{H(s)} & \rightarrow & H(\lambda)e^{\lambda t} \quad \text{si } \lambda \in ROC_h \\ e^{j\omega t} & \rightarrow & \boxed{H(j\omega)} & \rightarrow & H(j\omega)e^{j\omega t} = |H(j\omega)|e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))} \quad \text{si } j\omega \in ROC_h \end{array}$$

avec $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$.

L'intérêt d'étudier $|H(j\omega)|$ et $\angle H(j\omega)$ en fonction de ω est dès lors immédiat. Ces études nous amènent à considérer respectivement les diagrammes de Bode en *amplitude* et en *phase*. Il est important de remarquer que ces réponses sont caractéristiques du système *stable* associé à $H(s)$ puisqu'il faut sélectionner la ROC contenant $s = j\omega$.

Encore que les études temporelle et fréquentielle soient redondantes en théorie, elles sont complémentaires en pratique : certaines caractéristiques du système apparaissent de manière évidente dans l'une ou l'autre des deux études.

Construction générale des diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode comprennent

- le diagramme d'amplitude, représentant $20\log_{10}(|H(j\omega)|)$ en fonction de $\log_a(\omega)$;
- le diagramme de phase représentant $\angle(H(j\omega))$ en fonction de $\log_a(\omega)$.

Choix de la variable indépendante Concernant la valeur de $a > 0$, la convention la plus courante consiste à prendre $a = 10$. Un autre choix courant est $a = 2$. Cela correspond en fait simplement à une mise à l'échelle linéaire sur l'axe fréquentiel. En effet, considérant la propriété des logarithmes $\log_b(a^y) = y\log_b(a)$ pour $a, b > 0$, le cas particulier $y = \log_a(\omega)$ fournit

$$\log_b(\omega) = \log_a(\omega)\ \log_b(a)$$

où $\log_b(a)$ est une constante.

En particulier, pour $a = 2$ et $b = 10$, on a $\log_{10}(2) \approx \frac{6}{20}$. Ainsi, lorsque $|H(j\omega)| = \omega^{-n}$, on a

$$20\log_{10}(|H(j\omega)|) = -20n\log_{10}(\omega) \approx -6n\log_2(\omega) \ .$$

Cela veut dire qu'une décroissance de $-20n\, dB/$décade correspond approximativement à une décroissance de $-6n\, dB/$octave.

Décomposition d'un système en série de systèmes simples Les diagrammes de Bode de la mise en série de plusieurs systèmes sont donnés par la somme des diagrammes de Bode respectifs des différents sous-systèmes. En effet,

$$H(s) = H_1(s)\, H_2(s) ...\, H_n(s)$$
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 20\log_{10}(|H(j\omega)|) &= 20\log_{10}(|H_1(j\omega)|\,|H_2(j\omega)|\, ...\,|H_n(j\omega)|) \\ &= 20\log_{10}(|H_1(j\omega)|) + 20\log_{10}(|H_2(j\omega)|) + ... + 20\log_{10}(|H_n(j\omega)|) \\ \angle(H(j\omega)) &= \angle\left(e^{\angle H_1(j\omega)}e^{\angle H_2(j\omega)}...e^{\angle H_n(j\omega)}\right) \\ &= \angle(H_1(j\omega)) + \angle(H_2(j\omega)) + ... + \angle(H_n(j\omega)) \ . \end{aligned}$$

De manière similaire, si $H(s) = \frac{1}{H_1(s)}$, on a

$$\begin{aligned} 20\log_{10}(|H(j\omega)|) &= -20\log_{10}(|H_1(j\omega)|) \\ \angle(H(j\omega)) &= -\angle(H_1(j\omega)) \end{aligned}$$

Exemples non-triviaux classiques

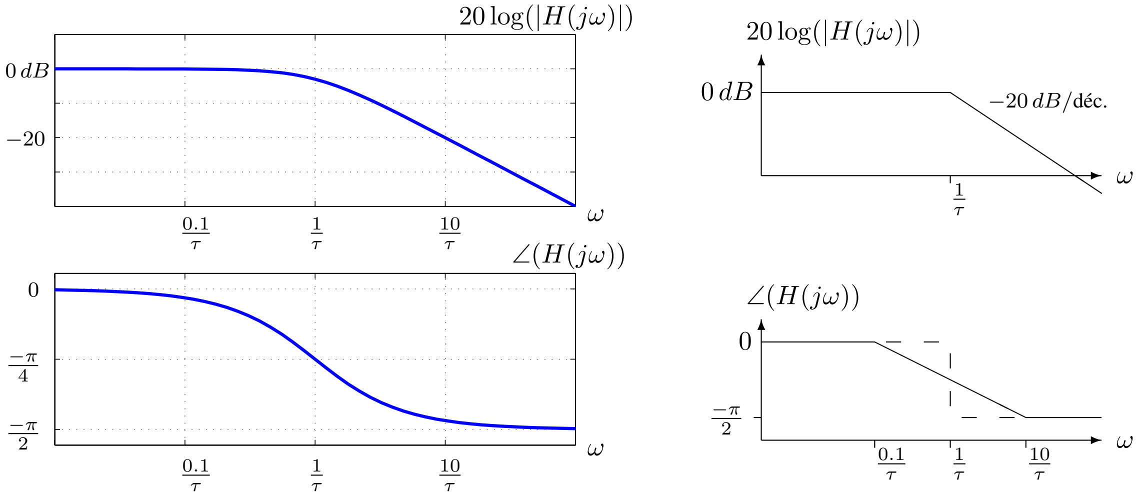
Systèmes d'ordre 1 $H(s) = \frac{1}{\tau s+1}$, τ réel positif, avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > -\frac{1}{\tau}\}$.

Les diagrammes de Bode exacts correspondant à $H(s)$ sont représentés sur la gauche de la figure ci-dessous. Les diagrammes de Bode de droite sont des approximations courantes utilisées dans ce cours :

$$20\log_{10}(|H(j\omega)|) \begin{cases} = \ 0\, dB & \text{pour } \omega \leq 1/\tau \\ \text{décroît de } -20\, dB/\text{déc.} & \text{pour } \omega > 1/\tau \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) \begin{cases} = \ 0 & \text{pour } \omega \leq 1/(10\tau) \\ = \ -\pi/2 & \text{pour } \omega \geq 10/\tau \\ \text{décroît de } -\pi/4\, rad/\text{déc.} & \text{pour } 1/(10\tau) < \omega < 10/\tau \end{cases} \qquad \text{(version précise)}$$

$$\text{ou } \angle H(j\omega) \begin{cases} = \ 0 & \text{pour } \omega \leq 1/\tau \\ = \ -\pi/2 & \text{pour } \omega > 1/\tau \end{cases} \qquad \text{(version simplifiée)}$$



Systèmes d'ordre 2 $H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0\, s+\omega_0^2}$ avec ω_0 (fréquence caractéristique) et ζ (facteur d'amortissement) réels positifs. Les pôles $-\zeta\omega_0\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}}\right)$ sont donc bien à partie réelle négative et on prend $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > -\zeta\omega_0\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}}\right)\}$.

Les diagrammes de Bode exacts correspondant à $H(s)$ pour différentes valeurs de ζ sont représentés sur la gauche de la figure ci-dessous. Les diagrammes de Bode de droite sont des approximations courantes utilisées dans ce cours :

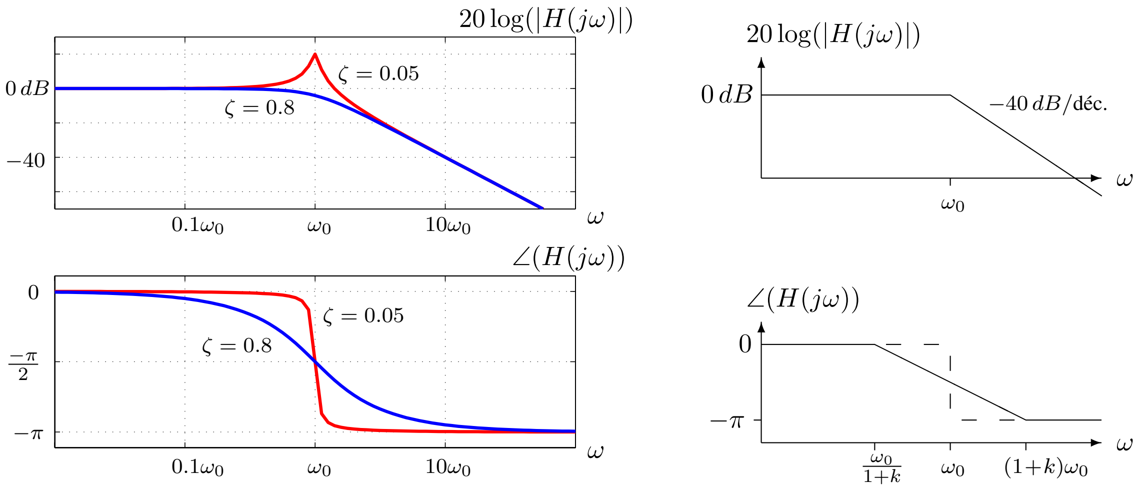
$$20\log_{10}(|H(j\omega)|)\begin{cases} = \ 0\,dB & \text{pour } \omega \le \omega_0 \\ \text{décroît de } -40\,dB/\text{déc.} & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Il vient éventuellement s'y ajouter un pic près de ω_0 pour $\zeta < \sqrt{2}/2$ (cfr. ci-dessous).

$$\angle H(j\omega)\begin{cases} = \ 0 & \text{pour } \omega \le \omega_0/(1+k) \\ = \ -\pi & \text{pour } \omega \ge \omega_0(1+k) \\ \text{décroît linéairement} & \text{pour } \omega_0/(1+k) < \omega < \omega_0(1+k) \end{cases}$$

avec $k > 0$ d'autant plus petit que ζ est petit (version précise)

avec $k = 0$ (version simplifiée)



Pour $\zeta < \sqrt{2}/2 \approx 0.7$, le diagramme d'*amplitude* possède un pic près de ω_0, dont le maximum est donné par

$$\begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} \\ |H(j\omega_{max})| &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

La *phase* subit une transition d'autant plus abrupte que ζ est petit. A la limite $\zeta \to 0$ où le système devient instable, la phase subit un saut discontinu et le maximum du pic d'amplitude tend vers l'infini.

Remarque : Bande passante à $-3\ dB$

L'énergie d'un signal passant par un système de fonction de transfert $H(s)$ est modulée par $|H(s)|^2$ (*cfr.* relation de Parseval). Par conséquent, lorsque

$$20\log(|H(j\omega)|) = -3\ dB \approx 20\log(1/\sqrt{2}) \quad \Leftrightarrow \quad 10\log(|H(j\omega)|^2) = -3\ dB \approx 10\log(1/2)\ ,$$

l'énergie d'un signal de fréquence ω est divisée par 2 en passant à travers le système.

La bande passante à $-3\ dB$ d'un système contient l'ensemble des fréquences pour lesquelles $|H(j\omega)|^2 \geq \frac{H^2}{2}$. Différentes conventions existent pour le choix de H selon l'application considérée (cfr. cours de Télécommunications par exemple). Les plus courantes utilisent le gain statique $H = |H(0)|$ ou le gain maximal $H = \max_\omega |H(j\omega)|$. La convention $H = 1$ est également fréquente, mais son désavantage est que la bande passante change lorsque le système est multiplié par un gain constant.

8.2 Exercices 130 - 142.

Exercice 130 - Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1+\frac{s}{2}}{s^2}\ .$$

Exercice 131 - Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{30(s+8)}{s(s+2)(s+4)} \; .$$

Exercice 132 - Soit un système LTI dont la réponse à l'entrée $u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})\mathbf{I}_+(t)$ est la sortie $y(t) = 2(e^{-t} - e^{-4t})\mathbf{I}_+(t)$.

a) Donner la réponse fréquentielle de ce système, ainsi que ses diagrammes de Bode.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$.

c) Donner une équation différentielle reliant l'entrée et la sortie.

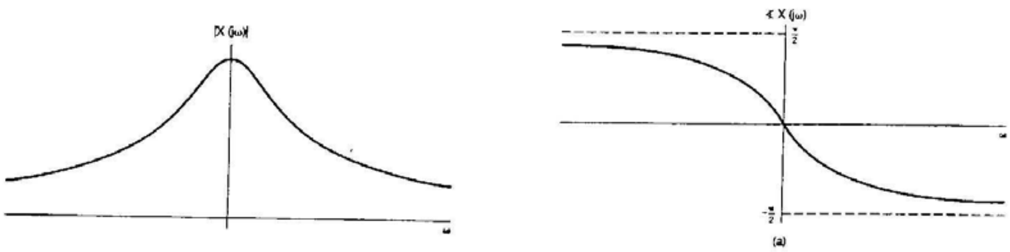
Exercice 133 - Soit le système causal représenté par un circuit RLC série avec $R = 1\,\Omega$, $C = 1\,F$ et $L = 1\,H$. L'entrée $u(t)$ est la tension au générateur et la sortie $y(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

a) Déterminer la fonction de transfert $H(s)$ entre la tension d'entrée $u(t)$ et la tension de sortie $y(t)$, et spécifier sa région de convergence.

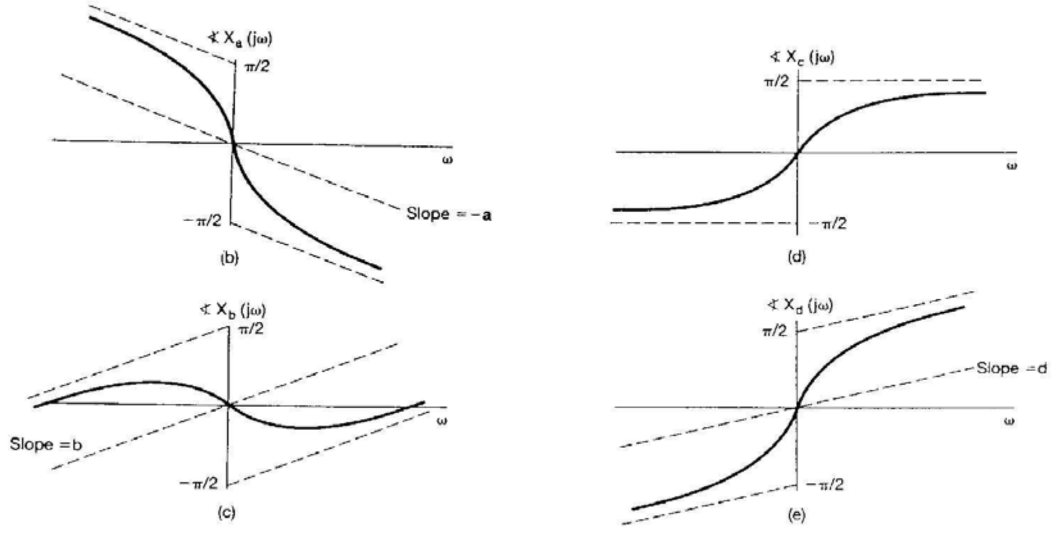
b) A l'aide du diagramme de Bode en amplitude pour $H(s)$, établir le caractère passe-bas, passe-haut ou passe-bande du circuit.

c) Procéder comme aux points a) et b) pour $R = 10^{-3}\Omega$.

Exercice 134 - Un signal continu $x(t)$ à valeurs réelles a une transformée de Laplace $X(s)$ dont les diagrammes d'amplitude et de phase sont donnés ci-dessous.



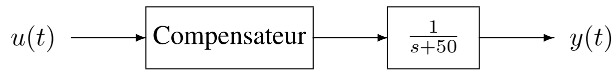
Les signaux $x_a(t), x_b(t), x_c(t)$ et $x_d(t)$ ont des transformées de Laplace dont le diagramme d'amplitude est identique à celui de $X(s)$, mais dont le diagramme de phase correspond à une transformation linéaire de la phase de $X(j\omega)$.



Déterminer $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ et $x_d(t)$ en fonction de $x(t)$.

NB : L'échelle des ω sur les figures ci-dessus est **linéaire** et non **pas logarithmique** comme habituellement.

Exercice 135 - Considérer le système représenté ci-dessous où la boîte "compensateur" est un système LTI en temps continu.



a) On désire choisir la réponse fréquentielle du compensateur de telle sorte que la réponse fréquentielle $H(j\omega)$ du système global satisfasse aux conditions suivantes.
   (i) L'amplitude logarithmique de $H(j\omega)$ a une pente de -40 dB/décade au-delà de $\omega = 1000$.
   (ii) Pour $0 < \omega < 1000$, l'amplitude logarithmique de $H(j\omega)$ doit se trouver entre - 10 dB et 10 dB.

   Proposer une fonction de transfert adéquate pour le compensateur et dessiner les diagrammes de Bode du système complet résultant.

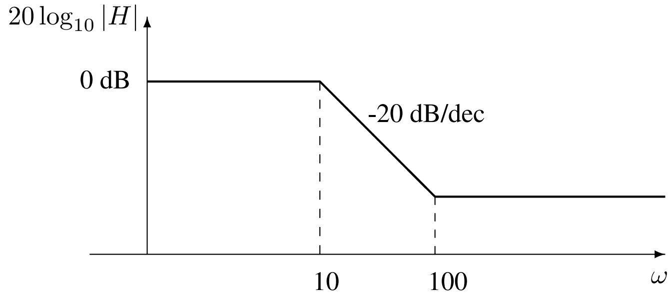
b) Répéter le point a) si les spécifications sur l'amplitude de $H(j\omega)$ sont les suivantes.
   (i) Elle doit avoir une pente de + 20 dB/décade pour $0 < \omega < 10$.
   (ii) Elle doit se trouver entre + 10 et + 30 dB pour $10 < \omega < 100$.
   (iii) Elle doit avoir une pente de - 20 dB/décade pour $100 < \omega < 1000$.
   (iv) Elle doit avoir une pente de - 40 dB/décade pour $\omega > 1000$.

Exercice 136 - *Novembre 1997* - Tracer les diagrammes de Bode du système décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 10y(t) = 10u(t)\ .$$

Evaluer la bande passante à $-3\ dB$ et le gain statique.

Exercice 137 - *Janvier 1999* - Soit le diagramme de Bode en amplitude correspondant à $H(s)$ représenté ci-dessous.



a) Proposer deux fonctions de transfert $H_1(s)$ et $H_2(s)$ distinctes (ni zéros ni pôles communs) pouvant correspondre à ce diagramme en amplitude. Tracer le diagramme de phase correspondant dans les deux cas.

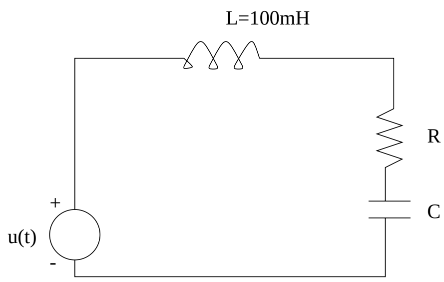
b) Comment doit-on modifier les systèmes du point a) pour que le diagramme d'amplitude associé corresponde à $20\ \log_{10}(|H(j\omega)|) - 3\,dB$?

Exercice 138 - *Septembre 1999* - Tracer les diagrammes de Bode du système décrit par l'équation différentielle

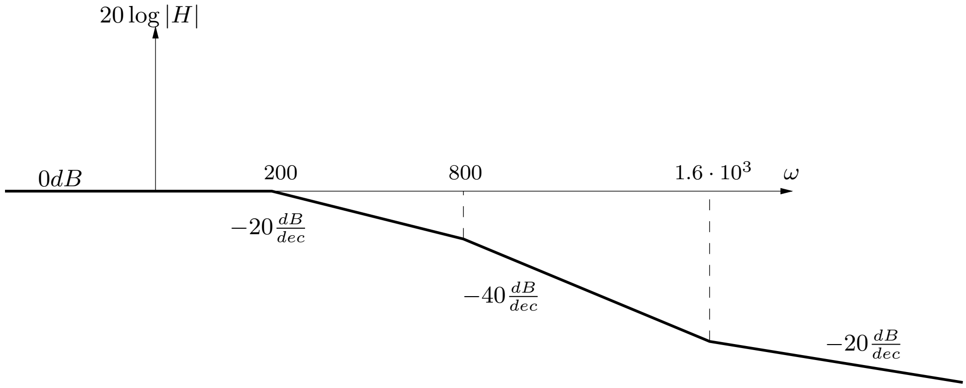
$$\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 9y(t) = 180u(t)\ .$$

Evaluer le gain statique et la bande passante à $-3\ dB$.

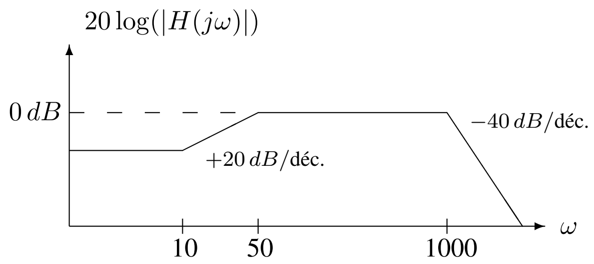
Exercice 139 - *Janvier 2000* - Soit le circuit RLC suivant où $y = v_C$.

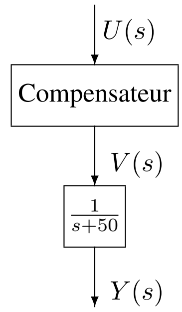


Calculer les valeurs R et C pour obtenir une réponse fréquentielle possédant les pôles de la réponse fréquentielle illustrée.



Exercice 140 - *Septembre 2000* - On désire réaliser un compensateur de manière à ce que la réponse fréquentielle du système complet ait l'allure représentée ci-dessous.



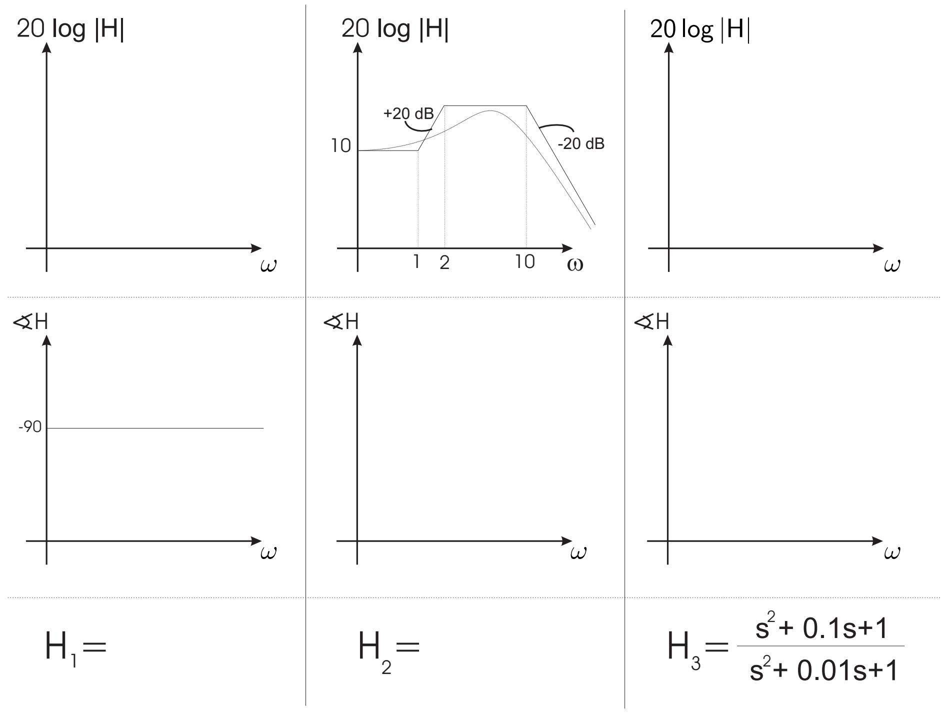


a) Tracer les diagrammes d'amplitude de $H_1(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)}$ et $H_2(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{U(j\omega)}$.

b) Donner une fonction de transfert $H_2(s)$ satisfaisante pour le compensateur.

Exercice 141 - *Janvier 2004* - Pour chacun des systèmes LTI stables suivants, tracer le(s) diagramme(s) de Bode manquant(s) et donner une expression d'une fonction de transfert à coefficients réels leur correspondant.

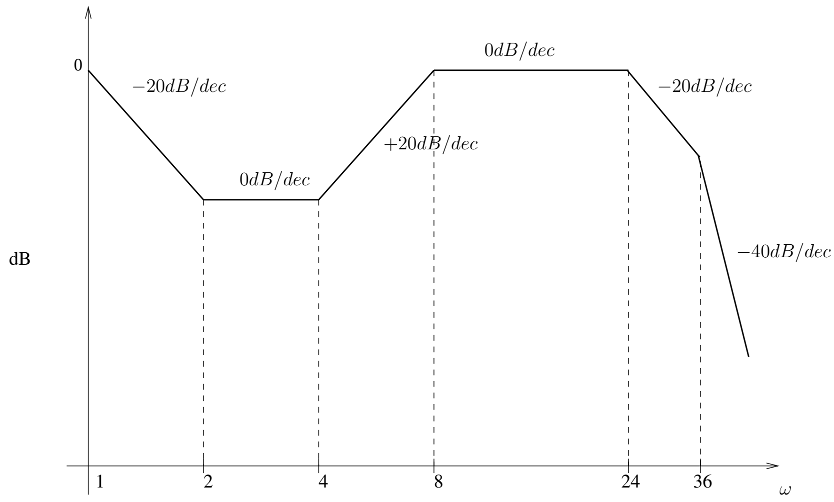
A quoi peut servir un filtre analogique de fonction de transfert H_3 ?



Exercice 142 - *Janvier 2005* - Le diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K(1+0,5s)(1+as)}{s(1+s/8)(1+bs)(1+s/36)}$$

est représenté sur la figure suivante.



Déterminer les paramètres K, a et b à partir de ce diagramme.

8.3 Applications MATLAB©

La commande bode de MATLAB© permet de tracer directement les diagrammes de Bode d'un système préalablement défini à l'aide de `tf`, `ss` ou `zpk`. L'utilisateur peut spécifier les bornes W_{min} et W_{max} du domaine fréquentiel ou un vecteur contenant les fréquences pour lesquelles on veut connaÃ®tre les valeurs des diagrammes de Bode. Par défaut, la plage de fréquences représentée est choisie automatiquement par le programme. Il est également possible de mémoriser le résultat dans un ensemble de variables plutôt que de simplement afficher le graphe. Tapez `help bode` dans MATLAB© pour voir la syntaxe exacte concernant ces possibilités et d'autres.

Applications

1. Tracez les diagrammes de Bode des exercices précédents dans MATLAB© et comparez avec les diagrammes approximatifs tracés à la main.
2. Considérez le système du pendule inversé décrit dans l'exercice 5. Utilisez la représentation d'état du système linéarisé autour d'un point d'équilibre stable (solution de l'exercice 60) avec les valeurs suivantes pour les paramètres :
   $m = 0.1\ kg$, $g = 9.81\ m/s^2$, $L = 0.5\ m$, $a = 0.1\ m$, $b = 0.1\ Ns$.
   Faites varier k dans l'intervalle où le modèle linéarisé est valide, *i.e.* tel que $\frac{a}{L} < \frac{a^2 k}{mgL} < 1$. Vérifiez (fonction `tf` ou `zpk`) que la fonction de transfert de ce système est de la forme
   $$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\ .$$
   Pour chaque valeur de k considérée, prenez note des valeurs de ζ et ω_n ; demandez à MATLAB© une caractérisation détaillée des diagrammes de Bode aux alentours de ω_n, recherchez le maximum du diagramme d'amplitude (fonction `max` de MATLAB©) et vérifiez les formules du cours théorique concernant ω_{max} et $|H(j\omega_{max})|$ pour les systèmes d'ordre 2.

3. Vérifiez dans MATLAB© que les systèmes que vous avez proposés comme solutions de l'exercice 135 respectent bien les exigences fixées. BONUS : Vous pouvez également essayer de programmer une boucle dans le but de trouver des valeurs de paramètres telles que les systèmes soient à la limite des exigences.