Chapitre 7

Fonctions de transfert, Stabilité et Transformées unilatérales

7.1 Rappel théorique

Fonctions de transfert

La fonction de transfert d'un système LTI est la transformée de Laplace ou en z de sa réponse impulsionnelle. Par conséquent, comme la réponse impulsionnelle, la fonction de transfert est pertinente pour l'analyse entrée-sortie de systèmes univoques associés à des *conditions initiales de repos*.

Domaine temporel		Domaine fréquentiel	ROC
$u[n]$ ou $u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U(z)$ ou $U(s)$	ROC_u
$\updownarrow$	$\mathcal{Z}$ ou $\mathcal{L}$	$\updownarrow$	
$*\,h[n]$ ou $*\ h(t)$	$\longleftrightarrow$	$\cdot\,H(z)$ ou $\cdot\ H(s)$	ROC_h
$\updownarrow$	$\mathcal{Z}$ ou $\mathcal{L}$	$\updownarrow$	
$y[n] = u[n] * h[n]$ ou $y(t) = u(t) * h(t)$	$\longleftrightarrow$	$Y(z) = U(z)H(z)$ ou $Y(s) = U(s)H(s)$	ROC_y

Remarques :

- $ROC_y \supseteq ROC_h \cap ROC_u$ et $ROC_u \cap ROC_h = \emptyset \Leftrightarrow y$ n'existe pas.
- Il y a une bijection entre un signal temporel $x(t)$ et un signal fréquentiel $X(s)$ **associé à sa ROC**.
- $u(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow y(t) = u(t) * h(t) = \begin{cases} H(\lambda)e^{\lambda t} & \text{si} \quad \lambda \in ROC_h \\ \text{pas défini} & \text{si} \quad \lambda \notin ROC_h \end{cases}$
- $\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}e^{-\sigma t}dt = \mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t})$ où $\mathcal{L}$ désigne la transformée de Laplace et $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier (*cfr.* suite). On en déduit que $\mathcal{F}(x(t))$ existe si $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ est telle que $\sigma = 0 \in ROC_x$.

Stabilité et Causalité

Systèmes continus

- Système décrit par une équation diférentielle à coefficients constants :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)} = \sum_{l=0}^{M} b_l u^{(l)}$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \; .$$

  Les racines du numérateur sont appelées les *zéros* du système. Les racines du dénominateur sont les *pôles* du système.
- Les diverses ROC que l'on peut associer à $H(s)$ sont les bandes parallèles à l'axe imaginaire délimitées par les pôles consécutifs (en partie réelle) ou par l'infini.
- Pour un système causal dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle, la ROC est un demi-plan, coupé parallèlement à l'axe $j\omega$, limité à gauche par le pôle le plus à droite. La ROC d'un système anti-causal est constituée du demi-plan limité à droite par le pôle le plus à gauche.
- Un système LTI est BIBO stable ssi sa ROC contient l'axe imaginaire.
- Un système LTI dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle ne peut être BIBO stable et causal que si tous ses pôles sont à partie réelle négative ; dans ce cas, il est également stable au sens interne (*i.e.* vis-à-vis de perturbations des conditions initiales).

Systèmes discrets

- La fonction de transfert d'une équation aux différences à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l u[n-l]$$

  est obtenue de la même manière que dans le cas continu, en remplaçant s par $\frac{1}{z}$; on peut ensuite multiplier haut et bas par z^M si $M \geq N$ ou z^N si $N \geq M$ afin d'obtenir une fraction rationnelle en z.
- Les ROC coorespondantes sont les anneaux centrés autour de l'origine et délimit'es par les pôles consécutifs (en norme) ; le premier anneau peut se réduit à un disque s'il n'y a pas de pôle en 0, tandis que le dernier anneau s'étend à l'infini.
- La ROC d'un système LTI causal est le complémentaire (dans le plan complexe) du disque dont le rayon est égal à la norme du pôle le plus éloigné de l'origine ; il s'agit donc du "dernier" anneau qui s'étend vers l'infini. La ROC d'un système anti-causal correspond au disque s'étendant jusqu'au pôle de plus petite norme.
- Un système LTI est BIBO stable ssi sa ROC contient le cercle de rayon unitaire.
- Un système ne peut être stable et causal que si tous ces pôles sont de norme inférieure à l'unité.

Transformées unilatérales

Afin d'étudier des systèmes associés à des conditions initiales quelconques, on introduit les transfromées de Laplace et en z *unilatérales*. Par opposition, on ajoute parfois le qualificatif *bilatéral* aux transformées présentées précédemment. Les transformées unilatérales sont définies comme suit.

$$\begin{aligned} X(s) = \mathcal{L}(x(t)) &= \int_{0}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ X(z) = \mathcal{Z}(x[n]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n} \end{aligned}$$

La seule différence avec les transformées bilatérales se situe au niveau de la borne inférieure d'intégration ou de sommation : la transformée unilatérale de $x(t)$ est égale à la transformée bilatérale de $x(t)\mathbf{I}_+(t)$ et similairement dans le cas discret. Par conséquent, les tranformées unilatérale et bilatérale sont égales pour tout signal nul pour $t < 0$; à l'autre extrême, la transformée unilatérale d'un signal nul pour $t \geq 0$ est nulle.

Les ROC associées aux transformées unilatérales sont toujours au moins aussi étendues que celles associées aux transformées bilatérales. En particulier, une ROC non-vide associée à la transformée de Laplace unilatérale est illimitée à droite et une ROC non-vide associée à la transformée en z unilatérale est illimitée vers les normes infinies.

Les propriétés les plus intéressantes des transformées unilatérales sont reportées dans les tableaux situés à la fin du présent syllabus. La différence majeure concerne la propriété de dérivation (temps-continu) ou de décalage (temps-discret), ce qui permet l'analyse d'équations différentielles ou aux différences associées à des conditions initiales non-nulles.

7.2 Exercices 90 - 129.

Exercice 90 - La sortie d'un système LTI causal est $y(t) = 2e^{-3t}\mathbf{I}_+(t)$ lorsque l'entrée est $u(t) = \mathbf{I}_+(t)$.

a) Trouver la fonction de transfert $H(s)$ du système et en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$.

b) Trouver la sortie $y(t)$ quand l'entrée est $u(t) = e^{-t}\mathbf{I}_+(t)$.

c) Trouver la sortie $y(t)$ quand l'entrée est $u(t) = e^{-t}$.

d) Trouver la sortie $y(t)$ quand l'entrée est $u(t) = e^{-5t}$.

Exercice 91 - Considérons les systèmes LTI en temps continu pour lesquels l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ sont liées par

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = u \; .$$

a) Trouver l'expression algébrique de la fonction de transfert $H(s)$ de ces systèmes.

b) Discuter la région de convergence de $H(s)$ et déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ dans les trois cas suivants : (i) le système est causal, (ii) le système est stable, (iii) le système est anticausal.

Exercice 92 - Un système LTI causal est caractérisé par la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6} \; .$$

a) Donner une équation différentielle reliant l'entrée et la sortie.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

c) Quelle sera la sortie si l'entrée est $e^{-4t}(1-t)\mathbf{I}_+(t)$?

Exercice 93 - *Janvier 1999* - Considérer le système LTI décrit par l'équaton aux différences

$$y[n] = 2y[n-1] - \frac{3}{4}y[n-2] + u[n-1] \; .$$

a) Trouver la fonction de transfert $H(z)$, ses pôles et ses zéros, et discuter les régions de convergence.

b) Calculer la réponse impulsionnelle du système causal.

c) Le système causal est instable. Déterminer une réponse impulsionnelle stable qui satisfait l'équation aux récurrences.

d) Résoudre l'équation pour $n \geq 0$ avec l'entrée $u[n] = \delta[n]$ et la condition initiale $y[-2] = 2$ et $y[-1] = 3/4$ (système causal).

Exercice 94 - Les systèmes LTI continus causaux définis par les équations différentielles suivantes sont-ils BIBO stables ?

a) $y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) + y(t) = u(t)$

b) $y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) + y(t) = u(t)$

Exercice 95 - Un système LTI causal initialement au repos et de réponse impulsionnelle $h(t)$ est décrit par la relation suivante entre son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$y'''(t) + (1+\alpha)y''(t) + \alpha(1+\alpha)y'(t) + \alpha^2 y(t) = u(t)$$

a) Pour quelles valeurs de α peut-on garantir que le système est stable ?

b) Si $g(t) = h'(t) + h(t)$, combien de pôles $G(s)$ possède-t-elle ?

Exercice 96 - *Novembre 1997* - Répondre par vrai ou faux et justifier brièvement.

a) Le système causal décrit par l'équation suivante est instable.

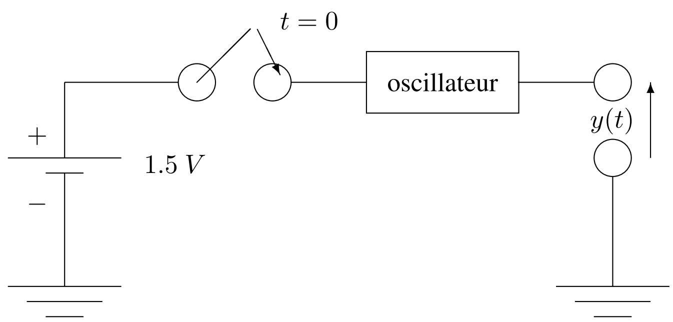
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$$

b) Un système causal est nécessairement stable.

c) Soit $H(s)$ la fonction de transfert d'un système stable. Le système de fonction de transfert $H_2(s) = 10H(s)$ a un temps de réponse approximativement dix fois plus court.

d) Le système décrit par $y(t) = u(t-2)$ est BIBO stable.

Exercice 97 - *Novembre 1997* - On cherche à réaliser l'oscillateur décrit ci-dessous :



En fermant l'interrupteur à l'instant $t = 0$, on souhaite que la tension de sortie soit $y(t) = \sin(200t)$ pour tout $t \geq 0$.

On demande de réaliser cet oscillateur au moyen de deux intégrateurs, de sommateurs et de multiplicateurs. On suppose que le système est au repos à l'instant $t = 0$. Calculer la fonction de transfert de l'oscillateur et donner le bloc-diagramme du système, ainsi que l'équation différentielle entrée-sortie.

Exercice 98 - *Novembre 1998* - Soit un système LTI, de réponse impulsionnelle $h[n]$ et de fonction de transfert $H(z)$, qui possède les propriétés suivantes.

(i) $h[n]$ est réel pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $h[n] = 0$ pour tout $n < -100$.

(iii) $\lim_{z\to\infty} H(z) = 1$.

(iv) $H(z)$ possède deux zéros.

(v) un des pôles de $H(z)$ n'est pas sur l'axe réel et se trouve sur le cercle défini par $|z| = 3/4$.

On demande de répondre aux deux questions suivantes en justifiant.

a) Le système est-il causal ?

b) Le système est-il stable ?

Exercice 99 - *Septembre 1999* - Soit la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2} \ .$$

a) Combien de systèmes LTI différents peuvent être associés à $H(s)$ et pourquoi ? Etudiez la causalité et la stabilité de chacun d'entre eux.

b) Esquissez le graphe de chaque réponse impulsionnelle (caractère croissant ou décroissant, support...).

c) Calculez la réponse impulsionnelle du système LTI stable associé à $H(s)$.

Exercice 100 - *Novembre 1999* - Calculer la réponse impulsionnelle du système stable ayant pour fonction de transfert

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

et donner le graphe de $h[n]$.

Exercice 101 - *Novembre 1999* - Soit le système décrit par l'équation différentielle

$$\cos(y)(1 + \dot{y}) = u(1 + \dot{u}) \ .$$

Caractériser les points d'équilibre (u_0, y_0) du système. Calculer la fonction de transfert du système linéarisé en un point d'équilibre (u_0, y_0).

Exercice 102 - *Novembre 2000* - Soit les deux systèmes suivants.

(i) $y[n] = \frac{1}{2}u[n] + u[n-1] + \frac{1}{2}u[n-2]$

(ii) $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + u[n]$, anticausal

a) Calculer les réponses impulsionnelles des systèmes (i) et (ii).

b) Esquisser le graphe de la réponse de chacun des systèmes à l'entrée $u[n] = \mathbf{I}_+[n] - \mathbf{I}_+[n-3]$.

c) Etudier la stabilité des deux systèmes.

Exercice 103 - *Septembre 2005* - Etablir l'équation entrée-sortie et la réponse impulsionnelle du système différentiel causal initialement au repos présentant les propriétés suivantes.

(i) l'entrée $u(t) = 1$ donne la sortie $y(t) = 2$;

(ii) l'entrée $u(t) = \mathbf{I}_+(t)\cos(2t)$ donne une sortie de la forme $y(t) = (Ae^{-t} + Be^{-2t})\mathbf{I}_+(t)$.

En particulier, déterminer les constantes A et B.

Suggestion : Bien interpréter le sens de la première propriété.

Exercice 104 - *Juin 2004* (+ Ex 36) - Considérer le système LTI causal de l'exercice 36.

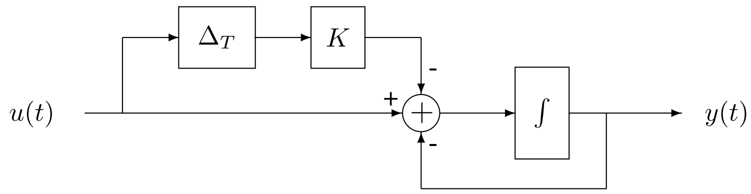
a) Calculer la fonction de transfert du système et déterminer sa région de convergence.

b) Modéliser le système par une équation différentielle du premier ordre de manière à ce que la réponse indicielle du modèle et celle du système aient

  (i) la même pente en $t = 0^+$ et

  (ii) la même valeur asymptotique pour $t \to \infty$.

Exercice 105 - *Juin 2001* - Soit le système LTI modélisé par le bloc-diagramme suivant.



où Δ_T désigne un retard pur de T et la constante K vaut e^{-T}.

(a) Calculez et tracez le graphe de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

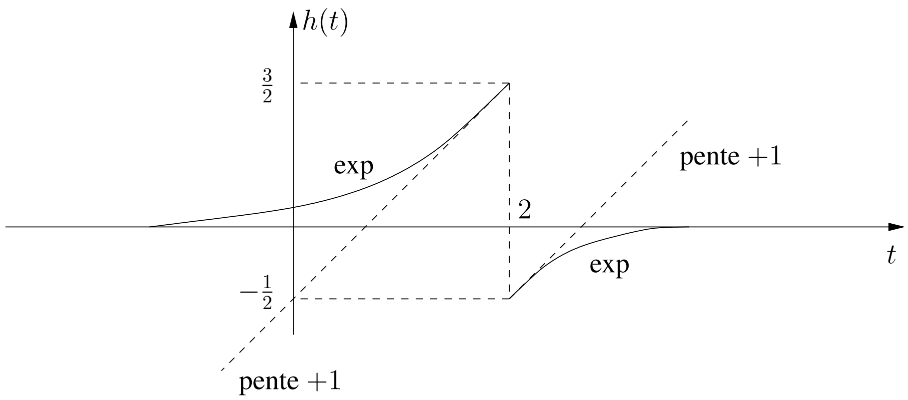
(b) Calculez la réponse du système à l'entrée

(i) rectangle 

(ii) train d'impulsion $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$.

Exercice 106 - *Juin 2001* -

a) Calculez l'expression algébrique et le domaine de convergence de la fonction de transfert $H(s)$ du système LTI de réponse impulsionnelle représentée ci-dessous.



b) Tracez le graphe de la réponse impulsionnelle causale associée à la même fonction de transfert.

Exercice 107 - *Novembre 2001* - On considère trois systèmes caractérisés par les réponses impulsionnelles suivantes.

(i) $h_1[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0, ..., +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(ii) $h_2[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0, ..., 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(iii) $h_3[n] = h_1[n+3]$

Pour chacun de ces systèmes,

a) déterminer la transformée $H_i(z)$ de $h_i[n]$, ses pôles, ses zéros et sa région de convergence ;

b) déterminer une équation entrée-sortie ;

c) étudier la stabilité et la causalité.

Exercice 108 - *Novembre 2001* (+ Ex 53) - Considérez le circuit de l'exercice 53. En supposant les capacités initialement déchargées, déterminez une condition sur la valeur (non nulle) des paramètres pour qu'aucun courant ne passe dans la résistance R_3. Pour cette valeur des paramètres, donnez la fonction de transfert liant y et u.

Exercice 109 - *Janvier 2002* - Répondez par vrai ou faux et justifiez.

a) Tous les systèmes LTI décrits par l'équation entrée-sortie $y[n] = 2y[n-1] - \frac{3}{4}y[n-2] + u[n]$ sont instables.

b) La stabilité entrée-sortie du système LTI décrit par le modèle d'état

$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] \\ y[n] &= Cx[n] \end{aligned}$$

ne dépend pas des matrices B et C.

c) Le système décrit par l'équation $y(t) = 3u^2(t) + 5u(t)$ est BIBO stable.

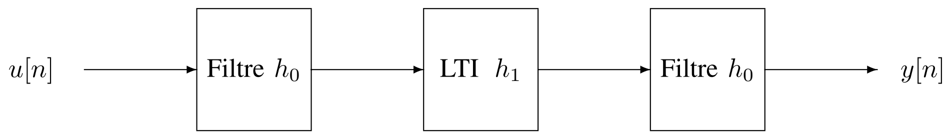
Exercice 110 - *Janvier 2002* (+ Ex 10) - Considérer le circuit de l'exercice 10. Montrer que la fonction de transfert est de la forme

$$K\frac{s^2 + 2\omega_n\zeta_1 s + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta_2 s + \omega_n^2}$$

et relier les paramètres ω_n, ζ_1 et ζ_2 aux constantes R, L et C.

Exercice 111 - *Juin 2002* (+ Ex 54) - Calculer la fonction de transfert du modèle linéarisé de l'exercice 54. Montrer que le système linéarisé est instable.

Exercice 112 - *Juin 2002* - On désire étudier le système LTI causal décrit par le schéma suivant.



Le filtre est décrit par la réponse impulsionnelle $h_0[n] = \frac{\mathbb{I}_+[n] - \mathbb{I}_+[n-2]}{2}$. L'équation entrée-sortie complète est donnée par $y[n] = u[n] + 3u[n-1] + 2u[n-2] - u[n-3] - u[n-4]$.

a) Déterminer l'équation entrée-sortie du filtre. Quel rôle joue ce filtre ? A-t-il une caractéristique "passe-bas" ou "passe-haut" ?

b) Déterminer la réponse impulsionnelle complète $h[n]$ et la réponse impulsionnelle du système LTI $h_1[n]$.

c) Calculer la sortie $y[n]$ pour l'entrée $u[n] = \mathbf{I}_+[n] - \mathbf{I}_+[n-2]$.

Exercice 113 - *Juin 2002* - Soit le système LTI caractérisé par les informations suivantes.

L'entrée $u(t)$, nulle pour $t > 0$ et de transformée de Laplace $U(s) = \frac{s+2}{s-2}$ donne la sortie $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\mathbf{I}_+(t) - \frac{2}{3}e^{2t}\mathbf{I}_+(-t)$.

a) Déterminer la fonction de transfert $H(s)$ du système et sa région de convergence.

b) Calculer la réponse indicielle du système.

c) Le système est-il causal ? Le système est-il stable ?

Exercice 114 - *Septembre 2002* -

a) Donner un exemple de système non-linéaire BIBO stable.

b) Donner un exemple de système BIBO stable de dimension infinie.

c) Enoncer un critère de stabilité BIBO pour le système

$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + \cos(\|x[n]\|)Bu[n] \\ y[n] &= \sin(n)Cx[n] \end{aligned}$$

Exercice 115 - *Septembre 2002* - Etablir l'équation entrée-sortie du système aux différences causal vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes :

(i) l'entrée $u[n] = 1$ donne la sortie $y[n] = 2$;

(ii) l'entrée $u[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ donne la sortie $y[n] = 0$;

(iii) l'entrée $u[n] = \mathbf{I}_+[n]\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ donne une sortie de la forme $y[n] = \mathbf{I}_+[n]\left(A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$;

(iv) $H(z)$ possède deux pôles et deux zéros.

Calculer les constantes non-nulles A et B.

Exercice 116 - *Septembre 2002* (+ Ex 55) - Calculer la fonction de transfert du système décrit par le modèle d'état de l'exercice 55.

Exercice 117 - *Septembre 2003* (+ Ex 11) - Considérer le modèle linéarisé du système à deux réservoirs de l'exercice 11.

a) Montrer que la fonction de transfert est de la forme $H(s) = m\frac{s+p}{(s+q)(s+r)}$ et exprimer m, p, q et r en fonction de $\bar{h}_1$, α et γ.

b) Considérer le système linéarisé autour du point de fonctionnement déterminé par l'entrée $\bar{u} = \frac{\alpha^2}{\gamma}$. Calculer la sortie $\delta y(t)$ du système linéarisé lorsque l'entrée est

  (i) $\delta u(t) = e^{-t}$

  (ii) $\delta u(t) = \mathbf{I}_+(t)e^{-t}$.

Exercice 118 - *Septembre 2003* - Répondre par vrai ou faux et justifier succintement.

a) Si $|h[n]| \leq K$ pour tout n, où K est une constante, alors le système LTI possédant $h[n]$ comme réponse impulsionnelle est stable.

b) Si un système LTI temps-discret a une réponse impulsionnelle $h[n]$ de durée finie, alors le système est stable.

Exercice 119 - *Janvier 2004* - Répondre par vrai ou faux et justifier brièvement.

a) Le système LTI $\dot{y}(t) = u(t)$ n'est pas BIBO stable.

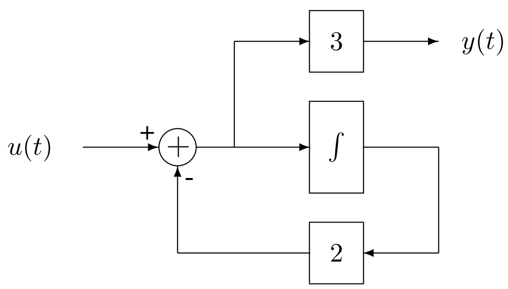
b) Le système LTI de fonction de transfert $H(s) = \frac{s+1}{s-1}$, $\Re(s) < 1$ est BIBO stable.

Exercice 120 - *Juin 2004* - Donner la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système LTI satisfaisant la condition respective.

a) De dimension finie mais non réalisable par un modèle d'état.

b) Stable, non causal et tel que l'entrée $u(t) = e^{2t}$ donne une sortie nulle.

c) Causal et dont la représentation est donnée par le bloc-diagramme suivant.



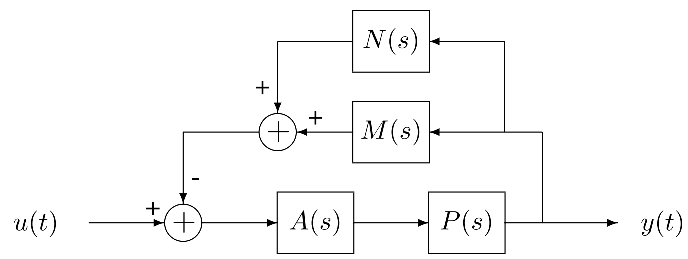
Exercice 121 - *Janvier 2005* (+ Ex 5,60) - Vérifiez la stabilité du point d'équilibre choisi pour linéariser le système décrit dans l'exercice 5.

Exercice 122 - *Juin 2005* - Répondez par vrai ou faux et justifiez brièvement.

a) Il existe une région de convergence telle que le système LTI décrit par la fonction de transfert $H(s) = \frac{s-10}{(7s^2+107s+11.2)(s+1)}$ est stable et causal.

b) $(\sin(10t), 2\sin(20t))$ est une paire entrée-sortie valide pour un système LTI.

c) La fonction de transfert correspondant au bloc diagramme



est $\frac{A(s)P(s)}{1+A(s)P(s)M(s)+A(s)P(s)N(s)}$.

Exercice 123 - *Juin 2005* (+ Ex 62) - Considérer le système LTI causal décrit dans l'exercice 62.

a) Trouvez la fonction de transfert $H(s)$, ses pôles et ses zéros, et sa région de convergence.

b) Calculez la réponse impulsionnelle $h(t)$.

c) Résolvez l'équation différentielle pour $t \geq 0$ avec l'entrée $u(t) = \alpha \mathbf{I}_+(t)$ et la condition initiale $y(0^-) = \beta$, $\dot{y}(0^-) = \gamma$.

Exercice 124 - *Novembre 2003* - Soit l'équation différentielle $\dot{y} + y = u$.

a) Calculez la réponse impulsionnelle du système LTI causal initialement au repos décrit par cette équation différentielle.

b) Déterminez la sortie $y(t)$ correspondant à l'entrée $u(t) = e^{j\omega t}$.

c) Déterminez un signal d'entrée $u(t)$ tel que la sortie correspondante satisfasse $|y(t)| = 0.5$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 125 - *Novembre 1999* - On désire réaliser un circuit analogique ayant les propriétés suivantes :

(i) L'entrée $u(t) = \cos 3t$ donne une sortie nulle.

(ii) La réponse indicielle converge vers $y_\infty = 4$.

(iii) La région de convergence de $H(s)$ est un demi-plan à droite de $\Re e(s) = -2$.

(iv) Le système a autant de pôles que de zéros.

a) Identifier les paramètres de la fonction de transfert

$$H(s) = K\frac{s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

pour répondre aux spécifications.

b) Réaliser cette fonction de transfert au moyen de deux intégrateurs, de sommateurs et de multiplicateurs.

c) Donner une représentation d'état du système.

d) Sans calcul explicite de la sortie, donner sa valeur asymptotique lorsque les deux intégrateurs sont initialisés à $x_i(0) = 1$ et lorsque $u(t) = \mathbf{I}_+(t) \sin 3t$. Justifier.

Exercice 126 - *Janvier 2000* - Soit le système différentiel causal décrit par

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) = u(t) \ .$$

a) Le système est-il stable ?

b) Soit $u(t) = \mathbf{I}_+(t)e^{-2t}$ et $y_0 = 0$; montrer que la sortie $y(t)$ diverge sauf si $\dot{y}_0$ est bien choisi. Calculer cette valeur de $\dot{y}_0$.

Remarque : Utiliser la transformée de Laplace unilatérale pour résoudre cet exercice.

c) Pour la valeur de $\dot{y}_0$ calculée en b) et $u(t) = \mathbf{I}_+(t)e^{-2t}$, montrer que $y(t)$ est bornée quelle que soit la valeur de y_0. Calculer la valeur asymptotique $\lim_{t\to\infty} y(t)$ pour une valeur de y_0 quelconque.

Exercice 127 - *Janvier 2000* - Répondre par vrai ou faux et justifier.
Soit le système LTI décrit par la réponse impulsionnelle

$$h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \ .$$

a) Le système est causal.

b) Le système est stable.

c) Si elle existe, la réponse à une entrée quelconque est périodique.

d) Une entrée paire à support compact donne une sortie nulle.

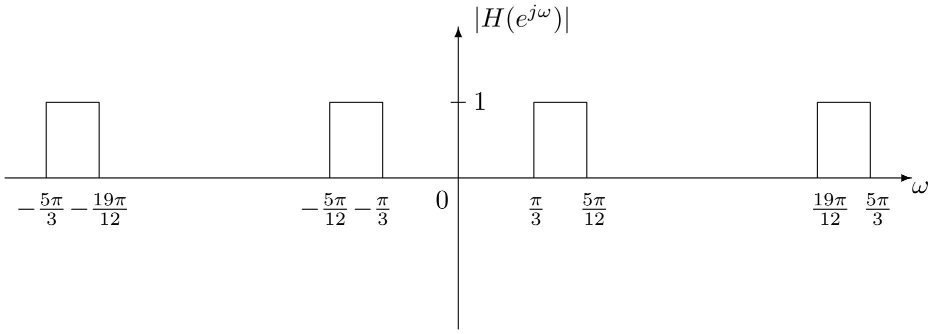
Exercice 128 - *Juin 2005* (+ Ex 61) - Donner la fonction de transfert correspondant au modèle linéarisé de l'exercice 61 décrivant le mouvement d'une bille sur un cerceau en rotation.

Exercice 129 - *Signal & Systems, Oppenheim and Willsky* - DÃ©terminer la sortie du filtre de la figure ci-dessous pour les entrÃ©es pÃ©riodiques suivantes :

a) $u_1[n] = (-1)^n$

b) $u_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $u_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} \mathbf{I}_+[n-4k]$



7.3 Applications MATLAB©

Création d'une fonction de transfert La commande `tf` est utilisée pour créer des représentations MATLAB© de systèmes décrits par leur fonction de transfert. La syntaxe la plus communément utilisée pour cette fonction est

$$\mathtt{sys} = \mathtt{tf}(\mathtt{num}, \mathtt{den})$$

où `sys` est le nom de la fonction de transfert, `num` est un vecteur contenant les coefficients polynomiaux du numérateur et `den` est un vecteur contenant les coefficients polynomiaux du dénominateur.

Exemple : Pour créer la fonction `sys` à partir de la fonction de transfert $H(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$, on utilisera

```
sys = tf([1 -1],[1 3 2]).
```

Etant donnée une fonction de transfert `sys`, la commande `tfdata` permet entre autre de retrouver les coefficients polynomiaux des numérateur et dénominateur. La syntaxe pour cela est

$$[\texttt{num}, \texttt{den}] = \texttt{tfdata}(\texttt{sys},\text{'}\texttt{v}\text{'})$$

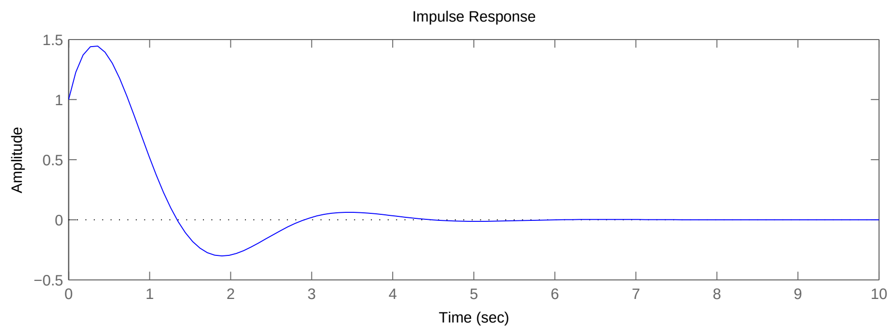
où 'v' est un argument de la fonction `tfdata` permettant d'afficher les résultats `num` et `den` sous forme d'un vecteur.

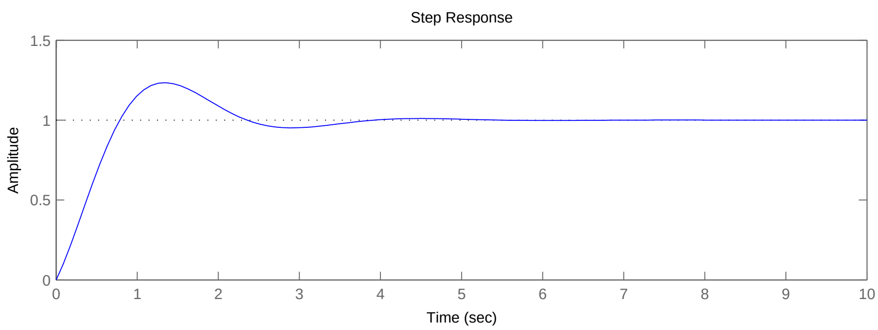
Réponses impulsionnelle et indicielle d'un système Les commandes `impulse` et `step` sont utilisées pour représenter graphiquement la réponse d'un système respectivement à une impulsion de Dirac et à une fonction échelon.

$$\texttt{impulse}(\texttt{sys}, \texttt{tfinal}) \qquad \texttt{step}(\texttt{sys}, \texttt{tfinal})$$

L'argument `tfinal` permet de simuler la réponse de $t = 0$ à $t =$`tfinal`. Il peut être omis.

Les figures suivantes représentent les réponses impulsionnelle et indicielle du système $H(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5}$ telles que fournies par MATLAB© dans l'intervalle de temps [0,10].



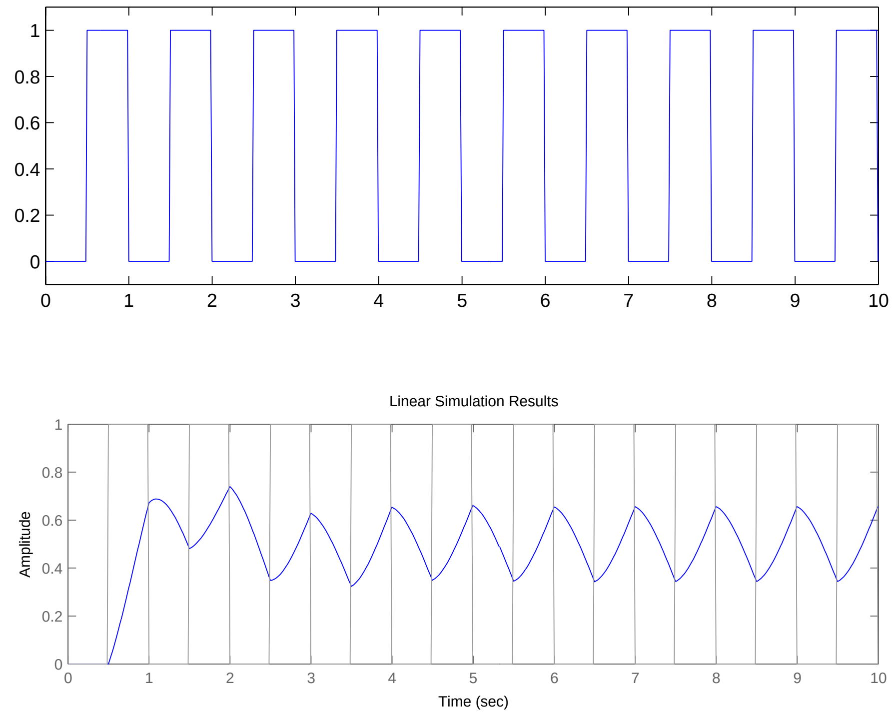


Réponse d'un système à une entrée arbitraire La commande `lsim` est utilisée pour simuler et représenter graphiquement la réponse d'un système LTI à des entrées arbitraires. La syntaxe est

```
lsim(sys,u,t)
```

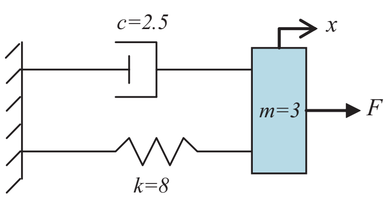
où `sys` est un modèle sous forme de fonction de transfert, `u` est le signal d'entrée (vecteur de même longueur que `t`) et `t` est un vecteur d'échantillonage temporel.

La figure suivante illustre un exemple d'utilisation de la commande `lsim` avec le système LTI de fonction de transfert $H(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5}$. Le graphe du dessus représente l'onde carrée[1] utilisée comme entrée. Le graphe du dessous est la réponse du système à cette entrée.



Applications

1. Considérer le système mécanique masse-ressort-amortisseur suivant.



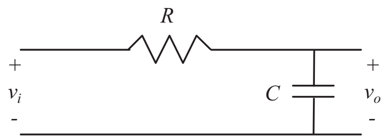
   a) Partant de conditions initiales nulles, vérifier que l'on peut modéliser le système par $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$.
   b) Calculer analytiquement la fonction de transfert du système (entrée F, sortie x) et l'utiliser pour représenter le système sous MATLAB© .

[1] La commande `gensig` permet de créer des signaux particuliers (sinusoïdaux, carrés, trains d'impulsions).

c) Calculer analytiquement les réponses impulsionnelle et indicielle du système. Comparer graphiquement aux réponses impulsionnelle et indicielle fournies par MATLAB© .

d) Simuler dans MATLAB© la réponse du système à une entrée sinusoïdale de fréquence 1.225 Hz. Observer que la réponse du système illustre le phénomène de résonance.

2. Soit le circuit électrique suivant.



a) Dériver analytiquement la fonction de transfert de ce système électrique où l'entrée est la tension $v_i(t)$ et la sortie est la tension $v_o(t)$.

b) Pour le cas où $R = 15\ k\Omega$ et $C = 0.4\ mF$, représenter ce système dans MATLAB© au moyen de sa fonction de transfert.

c) Représenter la réponse impulsionnelle du système.

d) Représenter la réponse du système si on applique une tension d'entrée $v_i(t) = 2V$ à partir de $t = 0$ ($\Rightarrow$ réponse à une fonction échelon).

e) Représenter la réponse du système à l'entrée définie par

$$v_i(t) = \begin{cases} 0V & \text{pour} \quad t < 0s \\ 3V & \text{pour} \quad 0s \leq t < 9s \\ 0V & \text{pour} \quad t \geq 9s \end{cases} \quad .$$